HAND OUT
(BAHAN AJAR)

MATA KULIAH
ALJABAR LINIER

Oleh:

Saminanto, S.Pd., M.Sc

PRODI TADRIS MATEMATIKA

FAKULTAS TARBIYAH IAIN WALISONGO SEMARANG

TAHUN 2011

KATA PENGANTAR

Bismillaahirrohmaanirrohiim

Segala puji bagi Allah, Tuhan seru sekalian alam. Hanya dengan berkah dan petunjuk-Nyalah, penulis selaku dosen dapat menyusun bahan ajar ini. Shalawat dan salam penulis sampaikan kepada Nabi Agung Muhammad SAW yang selalu diteladani dan diharapkan syafa'atnya.

Dalam proses perkuliahan dosen memiliki tugas membuat perencanaan perkuliahan, melaksanakan perkuliahan dan melakukan penilaian. Perencanaan perkuliahan meliputi pembuatan silabus perkuliahan, satuan ajar perkuliahan (SAP) yang dilengkapi dengan bahan ajar perkuliahan. Bahan ajar sangat penting dikembangkan untuk mendukung dan memberikan panduan perkuliahan terkait materi apa saja yang akan menjadi substansi dari suatu kompetensi yang akan di capai. Untuk itu dosen dalam melaksanakan perkuliahan diharapkan dapat mengembangkan bahan ajar sendiri sesuai dengan kompetensi yang diinginkan.

Dengan berbekal kemauan yang berdasarkan kebutuhan perkuliahan yang tertuang dalam silabus yang dijabarkan dalam SAP terwujudlah hand out/bahan ajar perkuliahan yang sederhana ini. Penulis menyadari dan memaklumi sepenuhnya bahwa bahan ajar ini jauh dari sempurna. Karenanya, segala kritik konstruktif dan saran perbaikan senantiasa diharapkan dan diterima dengan lapang dada dan senang hati untuk perbaikan penyusunan bahan ajar perkuliahan berikutnya.

Akhirnya, penulis hanya bisa berharap semoga bahan ajar ini bermanfaat untuk perkuliahan. Hanya kepada Allah-lah penulismenyembah dan memohon pertolongan, semoga laporan penelitian yang sederhana ini bermanfaat. Amien ...

Semarang, 20 Februari 2012

Saminanto, S.Pd, M.Sc

DAFTAR ISI

BAB I

SISTEM PERSAMAAN LINIER DAN MATRIK

1.1 Pengantar Kepada Sistem-Sistem Persamaan Linier

Sebuah garis di dalam bidang xy secara al jabar dapat dinyatakan oleh sebuah persamaan berbentuk :

$a_1x + a_2y = b$

secara lebih umum, persamaan linier dalam n variabel x_1, x_2, …..x_n sebagai sebuah persamaan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$a_1x_1 + a_1x_2 + \ldots.. + a_nx_n = b$

dimana a_1, a_2,….., a_n dan b konstanta riel.

<u>Contoh 1</u>

Berikut ini contoh persamaan linier

$x + 3y = 7$

$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$

Berikut ini yang bukanlah persamaan linier

$y - \sin x = 0$

$\sqrt{x1} + 2x_2 + x_3 = 1$

Sebuah pemecahan (solution) persamaan linier $a_1x_1 + a_1x_2 + \ldots.. + a_nx_n = b$ adalah sebuah urutan dari n bilangan s_1, s_2,….., s_n sehingga persamaan tersebut dipenuhi bila kita mensubstitusikan $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$,….., $x_n = s_n$, Sehingga himpunan semua pemecahan persamaan tersebut dinamakan <u>himpunan pemecahannya</u> (its solution).

Sebuah sistem yang tidak mempunyai pemecahan dikatakan tak konsistent (inconsistent). Jika ada stidak-tidaknya satu pemecahan, maka sistem persamaan tersebut konsistent (consistent).

Sebuah sistem sembarang yang terdiri dari m persamaan linier dengan n bilangan yang tidak diketahui akan dituliskan sebagai

$$\begin{array}{ll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. + a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots.. + a_{2n}x_n & = b_2 \\
\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots.. + a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}$$

Jika ditulis ke dalam bentuk matrix adalah sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Susunan di atas dinamakan matrix diperbesar (augmented matrix) untuk sistem tersebut

<u>Contoh :</u>

$x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

$2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1$

$3x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 0$

Maka bentuk matrix diperbesarnya adalah :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

Dalam menyelesaikan persamaan ada beberapa cara, diantaranya adalah :

a) Mengeliminasi bilangan-bilangan yang tidak diketahui secara sistematis, caranya adalah :

   - Kalikanlah sebuah persamaan dengan sebuah konstanta yang tak sama dengan nol
   - Tukarlah dua persamaan tersebut
   - Tambahkan kelipatan dari satu persamaan kepada yang lainnya

   <u>Contoh soal :</u>

   $x + y + 2z = 9$

   $2x + 4y - 3z = 1$

   $3x + 6y - 5z = 0$

   - Tambahkan n-2 kali persamaan pertama kepada persamaan kedua untuk mendapatkan

     $x + y + 2z = 9$

     $2y - 7z = -17$

     $3x + 6y - 5z = 0$

   - Tambahkanlah -3 kali persamaan kedua kepada persamaan ketiga untuk mendapatkan

     $x + y + 2z = 9$

$2y - 7z = -17$

$3y - 11z = -27$

- Kalikanlah persamaan kedua dengan ½ untuk mendapatkan

  $x + y + 2z = 9$

  $y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$

  $3y - 11z = -27$

- Tambahkan - 3 kali persamaan kedua kepada persamaan ketiga untuk mendapatkan

  $x + y + 2z = 9$

  $y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$

  $-\frac{1}{2}z = -\frac{3}{2}$

- Kalikan persamaan ketiga dengan -2 untuk mendapatkan

  $x + y + 2z = 9$

  $y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$

  $z = 3$

- Tambahkan -1 kali persamaan kedua kepada persamaan pertama untuk mendapatkan

  $x + \frac{11}{2}z = \frac{35}{2}$

  $y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2}$

  $z = 3$

- Tambahkan $-\frac{11}{2}$ kali persamaan ketiga kepada persamaan pertama dan $\frac{7}{2}$ kali persamaan ketiga kepada persamaan kedua untuk mendapat

  $x = 1$

  $y = 2$

  $z = 3$

b) Operasi Baris Elementer

Caranya :

- Kalikan sebuah baris dengan sebuah konstanta yang tak sama dengan nol
- Pertukarlah dua baris
- Tambahkan kelipatan dari satu baris pada baris lainnya

<u>Contoh soal :</u>

Dari soal di atas dapat dibentuk matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

- Tahap 1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

- Tahap 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array}\right]$$

- Tahap 3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

- Tahap 4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

- Tahap 5

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

- Tahap 6

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Soal 1 Sub Bab 1.1

1. Carilah matrix yang diperbesar dari sistem persamaan linier berikut ini

   $x_1 = 1$

   $x_2 = 2$

   Pemecahan Masalah :

   - Tahap 1

   Ubah ke dalam bentuk matriks

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

2. Carilah sebuah sistem persamaan linier yang bersesuaian dengan setiap matriks yang diperbesar berikut

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

   Pemecahan Masalah :

   $1x_1 + 0x_2 + (-1x_3) = 2$

   $2x_1 + 1x_2 + 1x_3 = 3$

   $0x_1 + (-1x_2) + 2x_3 = 4$

   Atau dapat ditulis

   $x_1 + -x_3 = 2$

$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$-x_2 + 2x_3 = 4$

1.2 Eliminasi Gauss

Di sub bab ini kita memberikan sebuah prosedur yang sistematis untuk memecahkan sistem-sistem persamaan linier

Bentuk eselon baris yang direduksi (reduced row – echelon form)

Caranya

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Supaya bentuk seperti itu, maka matrix harus mempunyai sifat-sifat berikut :

- Jika sebuah baris tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka bilangan tak nol pertama di dalam baris tersebut adalah 1. (kita menamakan ini 1 utama)
- Jika ada suatu baris yang terdiri seluruhnya dari nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bawah matrix
- Di dalam sembarang dua baris yang berurutan yang tidak terdiri seluruhnya dari nol, maka satu utama di dalam baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kana daripada 1 utama did dalam baris yang lebih tinggi
- Setiap kolom yang mengandung sebuah 1 utama mempunyai nol di tempat lain

Sebuah matrix yang mempunyai sifat-sifat 1,2 dan 3 dikatakan berada di dalam bentuk eselon baris (row – echelon form). Contoh matrix di dalam betuk eselon baris yang direduksi :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Contoh matrix di dalam bentuk eselon baris :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

<u>Contoh soal :</u>

Misalkan bahwa matrix yang diperbesar untuk sebuah sistem persamaan-persamaan linier telah direduksi oleh operasi baris menjadi bentuk eselon baris yang direduksi seperti yang diberikan. Pecahkanlah sistem tersebut :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

sistem persamaan di atas adalah :

$x_1 = 5$

$x_2 = -2$

$x_3 = 4$

dengan pemeriksaan maka $x_1 = 5$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$

Dalam pembahasan berikutnya kita akan mempelajari eliminasi gauss-jordan yang dapat digunakan untuk mereduksi sembarang matrix menjadi bentuk eselon baris yang direduksi. Untuk mempermudah pemahaman, mari kita lihat contoh soal berikut ini :

Pecahkanlah $\quad x + y + 2z = 9$

$2x + 4y - 3z = 1$

$3x + 6y - 5z = 0$

Dengan menggunakan eliminasi Gauss

Jawaban :

- Tahap 1

  Ubah dalam bentuk matrix yang diperbesar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

- Tahap 2

  Menjadi bentuk eselon baris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

- Tahap 3

  maka sistem yang bersesuaian dengan matrix ini

  $x + y + 2z = 9$

  $y - \frac{7}{2} z = - \frac{17}{2}$

  $z = 3$

- Tahap 4

  $y - \frac{7}{2} z = - \frac{17}{2}$, lalu mensubstitusikan $z = 3$

  $y - \frac{21}{2} = - \frac{17}{2}$

  $y = - \frac{17}{2} + \frac{21}{2}$

  $y = \frac{4}{2} = 2$

- Tahap 5

  $x + y + 2z = 9$ lalu substitusi y dan z

  $x + 2 + 2(3) = 9$

  $x + 8 = 9$

  $x = 1$

<u>Soal</u>

1. Pecahkan setiap sistem berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan

   $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$

   $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$

   $3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$

Jawaban :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ B_1 + B_2 \\ -2B_1 + B_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ x\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \begin{array}{l} -1B_2 + B_1 \\ \\ 10B_2 + B_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ :52 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} B_3\ x\ -7 + B_1 \\ B_3\ x\ 5 + B_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Maka, $x_1 = 3$

$x_2 = 1$

$x_3 = 2$

2. Dalam setiap bagian misalkanlah bahwa matrix yang diperbesar untuk sistem persamaan-persamaan linier telah direduksi oleh opera baris menjadi bentuk eselon baris yang direduksi seperti yang diberikan. Pecahkanlah sistem tersebut

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Jawaban :

$x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2$

$x_2 - 2x_3 = 1$

$x_3 = 2$

maka,

$x_2 - 2x_3 = 1$ dapat disubstitusi dengan $x_3 = 2$

$x_2 - 2(2) = 1$

$x_2 - 4 = 1$

$x_2 = 5$

dapat dipecahkan pula

$x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2$ dengan mensubstitusi $x_2 = 5$ dan $x_3 = 2$, sehingga

$x_1 + 2(5) - 4(2) = 2$

$x_1 + 10 - 8 = 2$

$x_1 = 0$

jadi, dapat ditemukan bahwa $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$

1.3 SISTEM PERSAMAAN LINIER HOMOGEN

Suatu sistem persamaan-persamaan linier dikatakan *homogen* jika semua suku konstantanya sama dengan nol. Bentuk umumnya adalah sebagai berikut :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0$$

Tiap-tiap sistem persamaan linier homogen adalah sistem yang konsisten, karena $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \cdots, x_n = 0$ selalu merupakan pemecahan. Pemecahan tersebut dinamakan ***pemecahan trivial (trivial solution)***; jika ada pemecahan lain, maka pemecahan lain tersebut dinamakan ***pemecahan yangtak trivial (non trivial solution)***.

<u>Contoh :</u>

Selesaikan sistem persamaan linier homogen berikut dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 0$$
$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Penyelesaian :

Persamaan tersebut kita ubah menjadi matrik yang diperbesar

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (baris\ pertama\ ditukar\ dengan\ baris\ ketiga) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (baris\ pertama\ \ x\ \ 1) + baris\ kedua \\ (baris\ pertama\ \ x\ -2) + baris\ ketiga \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ (baris\ kedua\ ditukar\ dengan\ baris\ keempat) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (baris\ kedua\ \ x\ \ 2) + baris\ pertama \\ \\ (baris\ kedua\ \ x\ -3) + baris\ ketiga \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (baris\ ketiga\ \ x\ \ sepertiga) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} (baris\ ketiga\ \ x\ -2) + baris\ pertama \\ (baris\ ketiga\ \ x\ -1) + baris\ kedua \\ \\ (baris\ ketiga\ \ x\ \ 3) + baris\ keempat \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Variabel utama : *baris pertama, baris ketiga, baris keempat*(x_1, x_3, x_4)

Dimisalkan x_2 = s

x_5 = t

Dikembalikan ke sistem persamaan linier semula

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_5 = 0 \\ &x_1 = -x_2 - x_5 \Rightarrow -s - t \\ &x_3 + x_5 = 0 \\ &x_3 = -x_5 \Rightarrow -t \\ &x_4 = 0 \end{aligned}$$

Himpunan Penyelesaian = $\{(-s-t); \quad s; \quad (-t); \quad 0; \quad (t)\}$

> **Teorema.** Sebuah *sistem persamaan-persamaan linier homogen dengan lebih banyak bilangan yang tak diketahui daripada banyaknya persamaan selalu mempunyai tak terhingga banyaknya pemecahan.*

1.4 MATRIKS DAN OPERASI MATRIKS

> **Definisi.** Sebuah ***matriks*** adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan di dalam susunan-susunan tersebut dinamakan ***entri*** di dalam matriks.

Bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ukuran matriks = baris *x* kolom.

Baris = ukuran matriks yang menyatakan banyaknya baris (garis horizontal)

Kolom = ukuran matriks yang menyatakan banyaknya kolom (garis vertikal)

Kalau misalkan banyak baris pada matrik adalah 5, dan banyak kolom pada matrik adalah 3. Maka ukuran matriks = 5 *x* 3.

<u>Operasi matriks</u>

1. Penjumlahan

Definisi. Jika *A* dan *B* adalah sembarang dua matriks yang ukurannya sama, maka ***jumlah****A* + *B* adalah matriks yang didapatkan dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersangkutan di dalam kedua matriks tersebut. Matriks-matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4+2 & 5+7 \\ 8+5 & 6+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 13 & 15 \end{bmatrix}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa jika matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ ditambahkan,

maka akan menjadi $A + B = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$

Dan jika kedua matriks berbeda ukurannya, maka tidak bisa ditambahkan. Karena tidak punya pasangan matriks(jomblo).

2. Pengurangan

Definisi. Sama dengan penjumlahan, yang membedakan adalah operasinya.

Contoh :

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

$A - B = \begin{bmatrix} 4-2 & 5-7 \\ 8-5 & 6-9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

Jadi dapat disimpulkan bahwa jika matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ dikurangkan, maka akan menjadi $A - B = \begin{bmatrix} a-e & b-f \\ c-g & d-h \end{bmatrix}$

Dan jika kedua matriks berbeda ukurannya, maka tidak bisa dikurangkan. Karena tidak punya pasangan matriks(jomblo).

3. Perkalian

Definisi. Jika *A* adalah sebuah matriks *m x r* dan *B* adalah sebuah matriks *r x n*, maka ***hasil kali AB***adalah *m x n* yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri di dalam baris *i* dan kolom *j* dari *A B*, maka pilihlah baris *i* dari matrik *A* dan kolom *j* dari matriks *B.* Kalikanlah entri-entri yang bersangkutan dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil perkalian yang dihasilkan.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (1x4)+(7x5)+(5x2) & (1x7)+(7x1)+(5x3) \\ (2x4)+(6x5)+(4x2) & (2x7)+(6x1)+(4x3) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4+35+10 & 7+7+15 \\ 8+30+8 & 14+6+12 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 49 & 29 \\ 46 & 32 \end{bmatrix}$$

Keterangan :

$A_{m \ x \ r}$ $\quad B_{r \ x \ n}$ $\quad = AB_{m \ x \ n}$

$A_{2 \ x \ 3}$ $\quad B_{3 \ x \ 2}$ $\quad = AB_{2 \ x \ 2}$

1.5 KAIDAH-KAIDAH ILMU HITUNG MATRIK

Pada bilangan riel *a* dan *b*, kita mempunyai $ab = ba$ sering kita sebut *hukum komutatif untuk perkalian.*Tapi dalam matrik, *AB* dan *BA* tidak slalu sama, hal ini bisa terjadi karena: *AB* terdefinisikan tetapi *BA* tidak, atau kedua duanya terdefinisikan tetapi ukurannya berbeda.

Contoh:

A = $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Maka,

AB = $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ BA = $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

Teorema:2 Dengan *menganggap bahwa ukuran ukuran matrik adalah sedemikian rupa sehingga operasi-operasi yang di tunjukkan dapat dilakukan, maka kaidah kaidah ilmu hitung matrik berikut akan berlaku.*

a) $A + B = B + A$
b) $A + (B + C) = (A + B) + C$
c) $A(BC) = (AB)C$
d) $A (B + C) = AB + BC$
e) $(B + C) A = BA + BC$
f) $A (B - C) = AB - BC$
g) $(B - C) A = BA - BC$
h) $a(B + C) = aB + aC$

i) $a(B - C) = aB - aC$

j) $(a + b)C = aC + bC$

k) $(a + b)C = aC + bC$

l) $(ab)C = a\ (bC)$

m) $a\ (BC) = (aB)\ C = B\ (aC)$

Sebuah *matrik* yang semua entrinya sama dengan nol,dinamakan ***matrik nol (zeromatrix).***

i. Jika ab = ac dan $a \neq 0$, maka $b = c$ *(hukum peniadaan)*

ii. Jika $ab = 0$ maka stidaknya satu dari faktor di sebelah kiri adalah *0*

Teorema.3 *Dengan menganggap bahwa ukuran ukuran matrik adalah sedemikian rupa sehingga* operasi-*operasi yang di tunjukkan dapat dilakukan, maka kaidah kaidah ilmu hitung matrik berikut akan berlaku.*

a) $A + 0 = 0 + A = A$

b) $A – A= 0$

c) $0 – A = - A$

d) $A0 = 0,\ 0A = A$

Teorema 4. *Tiap-tiap sistem persamaan-persamaan linier akan mempunyai tidak ada pemecahan, persis satu pemecahan, atau tak terhingga banyaknya pemecahan.*

Bukti:

Anggaplah $AX = B$

Misal: $AX_1 = B$, $AX_2 = C$, *maka* $AX_1 - AX_2 = 0$ *atau* $AA(X_{1-}AX_{2)} = 0$

$X_0 = X_1 - X_2$

k = *sembarang skalar*

maka:

$A\ (X_1 + kX_0) = AX_1 + A(kX_0)$

$= AX_1 + k(AX_0)$

$= B + k0$

$= B + 0$

$= B$

Teorema.5. *jika B dan C kedua-duanya aalah infers dari matrik A maka B = C*

Bukti:

Karena *B* adalah *sebuah* infers dari *A*, maka *AB = I*. Dengan mengalihkan kedua ruas dari sebelah kanan dengan *C* maka akan di berikan *(BA)C = IC = C*, tetapi *(BA)C = B (AC) = BI = B*, sehingga *B = C.*

Teorema. 6. *Jika A dan B adalah matrik-matrik yang dapat dibalik dan yang ukuranyya sama maka:*

a) *AB dapat dibalik*
b) $(AB)^1 = (A)^1(B)^1$

"Sebuah hasil perkalian matrik-matrik yang dapat dibalik selalu dapat dibalik, dan infers dari perkalian tersebut adalah hasil perkalian dari invers-invers di dalam urutan yang dibalik"

Teorema.7.*jka A adalah sebuah matrik rang dapat dibalik, maka:*

a) A^{-1}*dapat dibalik dan* $(A^{-1})^{-1}$
b) A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ untuk $n = 0,1,2,\ldots$
c) Untuk setiap skalar k yang tak sama dengan nol, maka kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = 1/k \,.\, A^{-1}$

Bukti:

a) *Karena* $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, *maka* A^{-1} *dapat dibalik dan* $(A^{-1})^{-1} = A$

1.6 MATRIKS ELEMENTER DAN METODA UNTUK MENCARI A^{-1}

Definisisebuah matriks *n* x *n* dinamakan *matriks elementer* jika matriks tersebut dapat diperoleh dari matriks satuan *n* x *n* yakni I_n dengan melakukan sebuah operasi baris elementer tunggal.

Contoh

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ diperoleh dari mengalikan baris kedua dengan -3

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Tambahkan tiga kali baris ketiga kemudian jumlahkan dengan baris pertama

Teorema 8. *Jika* matriks *elementer E dihasilkan dari melakukan operasi baris tertentu pada* I_m *dan jika A adalah sebuah matriks m* x *n, maka hasil perkalian EA adalah matriks yang dihasilkan bila operasi baris yang sama dilakukan pada A.*

Teorema 9. *Tiap*-tiap *matriks elementer data dibalik, dan inversnya adalah juga sebuah matriks elementer.*

Bukti jika *E* adalah matriks elementer yang diperoleh dari melakukan operasi baris pada *I*. Misalkan E_0 adalah matriks satuan yang dihasilkan bila invers operasi ini dilakukan ada *I*. Dengan memakai teorema 8 dan dengan menggunakan kenyataan bahwa operasi baris invers akan saling meniadakan efek satu sama lain maka diperoleh

$$E_0E = I \text{ dan } \quad EE_0 = I$$

Jadi, matriks elementer E_0 adalah invers dari *E*.

Teorema 10. *Jika A adalah* sebuah *matriks n* x *n, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen, yakni semuanya benar dan semuanya palsu.*

(a) A dapat dibalik
(b) AX = 0 hanya mempunyai satu pemecahan trivial.
(c) A ekivalen baris ada I_n.

Bukti ekivalen ini akan dibuktikan dengan menghasilkan rangkaian implikasi berikut :
$(a) \to (b) \to (c) \to (a)$

$(a) \to (b)$: anggaplah *A* dapat dibalik dan misalkan X_0 adalah suatu pemecahan kepada $AX = 0$. Dengan mengalikan kedua ruas dengan A^{-1}maka akan memberikan $A^{-1}(AX) = A^{-1}0$ atau $IX = 0$, atau $X_0 = 0$. Jadi $AX = 0$ hanya mempunyai satu pemecahan trivial.

$(b) \to (c)$: misalkan $AX = 0$ adalah bentuk matriks dari system

$$\begin{array}{llll} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & \dots & + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & \cdots & + a_{21}x_{1n} = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 & & + \ a_{nn}x_n = 0 \end{array} \qquad (1.6)$$

Anggaplah system tersebut mempunyai penyelesaian trivial. Ika kita memecahkannya dengan menggunakan eliminasi Gauss Jourdan, system persamaan yang bersesuaian dengan bentuk eselon baris yang tereduksi dari matriks yang diperbesar menjadi

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & & & = 0 \\ & x_1 & & & = 0 \\ & & \ddots & & = 0 \\ & & & x_{1n} & = 0 \end{array} \qquad (1.7)$$

Jadi matriks yang diperbesar tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{11} & a_{11} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & nn & 0 \end{bmatrix}$$

Supaya (1.6) dapat reduksi menjadi matriks yang diperbesar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk (1.7) dengan sebuah urutan operasi baris elementer. Jika kita tidak memerdulikan kolom terakhir di dalam setiap matriks ini, maka kita dapat menyimpulkan bahwa *A* dapat direduksi kepada $I_n$dengan sebuah urutan operasi baris elementer, yakni *A* ekivalen baris kepada I_n

$(c) \rightarrow (a)$ anggalah A ekivalen baris kepada I_n sehingga A data direduksi kepada $I_n$dengan operasi baris elementer. Menurut teorema 8 setiap operasi ini dapat dirampungkan dengan mengalikan dengan matriks elementer yang bersesuaian di sebelah kiri. Jadi, kita dapat mencari matriks elementer $E_1, E_2, . . . , E_k$ sehingga

$$E_k . . . E_2 E_1 A = I_n \qquad (1.8)$$

Menurut teorema 9, $E_1, E_2, . . . , E_k$ dapat dibalik. Dengan mengalikan kedua ruas dari sebelah kiri dengan $E_k^{-1} . . . E_2^{-1} E_1^{-1}$maka diperoleh

$$A = E_k^{-1} . . . E_2^{-1} E_1^{-1} I_n = E_k^{-1} . . . E_2^{-1} E_1^{-1} \qquad (1.9)$$

Karena (1.9) menyatakan A sebagai hasil perkalian matriks-matriks yang dapat dibalik maka kita data menyimpulkan bahwa A dapat dibalik.

1.7. Hasil Selanjutnya Mengenai Sistem Persamaan Dan Keterbalikan

- **Teorema 11**

Jika A adalah sebuah matriks n x n yang dapat dibalik, maka untuk setiap matriks B yang berukuran n x1, system persamaan $AX = B$ mempunyai persiis satu pemecahan, yakni, $X = A^{-1} B$.

Bukti:

Karena $A(A^{-1} B) = B$, maka $X = A^{-1} B$ adalah sebuah pemecahan dari $AX = B$. dalam pembuktian ini, anggaplah bahwa X_0 adalah sebuah pemecahan sebarang dan kemudian memperlihatkan bahwa X_0 harus merupakan pemecahan $A^{-1} B$

$AX = B$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(B)$$
$$A^{-1}.A.X = A^{-1}(B)$$
$$I.X = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

(Dalam teorema sebelumnya pada sub bab 1.5 telah dibuktikan bahwa $A^{-1} . A = I$)

Contoh soal:

Tinjaulah system persamaan linier berikut, dan tentukanlah nilai A_1, A_2, A_3!

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 5$$
$$2X_1 + 5X_2 + 3X_3 = 3$$
$$X_1 + 8X_3 = 17$$

Jawab:

Di dalam bentuk matriks maka system ini dapat dituliskan sebagai AX = B, dimana

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

Langkah 1 : Menginverskan A

Dengan menggunakan cara Operasi bilangan Elementer didapatkan

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 2: mencari nilai A_1, A_2, A_3

AX =B

$$X = A^{-1}.B$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

HP = {1, -1, 2}

- **Teorema 12**

Misalkan A adalah sebuah matriks kuadrat

(a). Jika B adalah sebuah matriks kuadrat yang memenuhi BA = I, maka B = A $^{-1}$

(b). Jika B adalah sebuah matriks kuadrat yang memenuhi AB = I, maka B = A^{-1}

Bukti :

(a). dimisalkan A adalah sebarang matriks kuadrat, akan dibuktikan bahwa A^{-1} . A = A . A^{-1}

Dimisalkan A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka, A^{-1} = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

A^{-1} . A = A . A^{-1}

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} da-bc & 0 \\ 0 & -cb+ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -cb+ad \end{bmatrix}$$

Terbukti bahwa $A^{-1} . A = A . A^{-1}$ sehingga $A . A^{-1} = I$

Kemudian anggaplah BA = I, kalikan kedua ruas dengan A^{-1}

BA = I

BA . A^{-1} =I. A^{-1}

B . I = I A^{-1}

B = A^{-1} terbukti

(b). Anggaplah AB = I

$A^{-1}(A.B) = A^{-1}(B)$

$I .B = A^{-1} . I$

$B = A^{-1}$ terbukti

- **Teorema 13**

Jika A adalah sebuah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ekuivalen satu sama lain.

(a). A dapat dibalik

(b). AX = 0 hanya mempunyai pemecahan trivial

(c). A ekuivalen baris kepada In

(d). AX = B konsisten untuk tiap-tiap matriks B yang berukuran n x 1

Bukti : karena kita telah membuktikan di dalam teorema 10 bahwa (a), (b), dan (c) ekuivalen satu sama lain, maka kita cukup membuktikan bahwa (a) $\Rightarrow$ (d) dan (d) $\Rightarrow$ (a)

(a) $\Rightarrow$ (d) : jika A dapat dibalik dan B adalah sebarang matriks n x 1 maka X = A^{-1} adalah pemecahan dari AX = B menurut teorema 11, jadi AX = B konsisten.

(d) $\Rightarrow$ (a) :

BAB II

DETERMINAN

2.1 Fungsi Determinan

Permutasi himpunan bilangan-bilangan bulat {1,2,3,…,n} adalah sebuah susunan bilangan-bilangan bulat menurut suatu aturan tanpa menghilangkan atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut.

CONTOH : Permutasi dari himpunan bilangan bulat {1,2,3} adalah :

(1,2,3) (2,1,3) (3,1,2)

(1,3,2) (2,3,1) (3,2,1)

Metode yang mudah untuk mendaftarkan permutasi adalah dengan menggunakan pohon permutasi.

~~Rumus untuk menghitung jumlah permutasi adalah = n!~~

Inversi adalah jika sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului sebuah bilangan sebuah bilangan bulat yang lebih kecil. Contoh : inversi dari permutasi (2,4,1,3) adalah : 1 + 2 + 0 = 3.

Permutasi genap adalah jika jumlah inversi seluruhnya adalah bilangan bulat genap dan permutasi ganjil adalah jika jumlah inversi seluruhnya adalah bilangan bulat ganjil.

Sebuah matrik A yang berukuran n × n mempunyai n! hasil perkalian elementer yang berbentuk a_{1j1}, a_{2j2}, …, a_{njn}di mana (j1, j2, …, j3) adalah sebuah permutasi dari {1,2,3,…,n} yang diartikan sebagai hasil perkalian elementer bertanda dari A.

CONTOH :

Daftar hasil perkalian elementer yang bertanda dari matrik $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ adalah :

Hasil perkalian Elementer	Permutasi yang Diasosiasikan	Genap/ Ganjil	Hasil perkalian elementer yang bertanda
$a_{11}a_{22}a_{33}$	(1,2,3)	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}$
$a_{11}a_{23}a_{32}$	(1,3,2)	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$a_{12}a_{21}a_{33}$	(2,1,3)	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
$a_{12}a_{23}a_{31}$	(2,3,1)	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$a_{13}a_{21}a_{32}$	(3,1,2)	Genap	$a_{13}a_{21}a_{32}$
$a_{13}a_{22}a_{31}$	(3,2,1)	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}$

Determinan adalah jumlah semua hasil perkalian elementer bertanda. Fungsi determinan dari matrik A di tulis *det (A)* atau $|A|$. dari contoh di atas, dapat pula dituliskan :

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Determinan dari matrik tersebut adalah :

$$\det(A) = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$
$$- a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} - a_{13}.a_{22}.a_{31}$$

Secara simbolis dapat ditulis sebagai :

$$\boxed{\det(A) = \sum \pm a_{1j1} \,.\, a_{2j2} \,\ldots .\, a_{njn}}$$

CONTOH :

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ maka det (A) = 3.(-2) – (1.4) = -10

2.2 Menghitung Determinan dengan Reduksi Baris

Untuk menghitung determinan dengan reduksi baris dapat menggunakan teorema-teorema berikut :

1. Jika A adalah sembarang matrik yang mengandung sebaris nol, maka det (A) = 0Jika A adalah matrik segitiga yang berukuran n × n maka det (A) adalah hasil perkalian entri-entri dari diagonal utama.
   - Matrik segitiga atas :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

   - Matrik segitiga bawah :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2. Misalkan A adalah sembarang matrik n × n,
   a. Jika A’ adalah matrik yang diperoleh dari sebuah baris tunggal dari A dikalikan dengan konstanta k, maka det (A’) = k det(A).

b. Jika A' adalah matrik yang dihasilkan bila 2 baris dari matrik A dipertukarkan, maka det (A') = - det (A).

c. Jika A' adalah matrik yang dihasilkan dari kelipatan dari satu baris ditambahkan pada baris yang lain pada matrik A, maka det (A') = det (A).

Untuk mencari determinan matrik dengan reduksi baris caranya adalah dengan melakukan OBE dengan menggunakan teorema di atas (1,2,3) sehingga terbentuk perkalian konstanta dengan matrik dalam bentuk eselon baris. Jadi determinan adalah hasil perkalian konstanta tersebut.

CONTOH :

Hitung det (A) dimana : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

JAWAB :

det (A) = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$=- \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ tukar baris pertama dengan baris kedua (Teorema 1)

$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ faktorkan baris pertama (B_1) ……..(Teorema 3a)

$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{bmatrix}$ (B_1×(-2)) + B_3……..……………(Teorema 3c)

$= -3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{bmatrix}$ $(B_2 \times (-10) + B_3$ ……………(Teorema 3c)

$= -3.(-55) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ faktorkan baris ke-3 ……...(Teorema 3a)

= -3 (-55) . 1

= 165

2.3 Sifat-sifat Fungsi Determinan

1. Jika A adalah sembarang matrik kuadrat, maka :

$$\boxed{\det (A) = \det (A^t)}$$

2. Jika $A_{n \times n}$ dan k sembarang skalar dan k merupakan faktor bersama untuk semua entri pada matrik A, maka :

det (A) =k^n. Det (A)

3. Jika A, B, dan C adalah matrik kuadrat yang ukurannya sama dengan :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} a & b \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

   Maka :

$$\boxed{\text{det (A) + det (B) = det (C)}}$$

4. jika A dan B matrik kuadrat yang ukurannya sama, maka :

$$\boxed{\text{det (A.B) = det (A) . det (B)}}$$

5. Suatu Matrik A dapat dibalik (memiliki Invers) jika dan hanya jika det (A) ≠ 0
6. Jika matrik kuadrat A dapat dibalik, maka :

$$\boxed{\det (A^{-1}) = \frac{1}{\det (A)}}$$

CONTOH :

1. Buktikan dengan sifat 1 jika $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

   Jawab : sifat 1 adalah det (A) = det (A^t)

   det (A) = $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{matrix}$

   det (A) = $|A|$ = 0 + 36 + (-14) – 0 – 12 – (-16) = 26

   $A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ maka det (A^t) = $|A^t| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 7 & 6 \end{matrix}$

   = 0 + (-14) + 36 – 0 – 12 – (-16)
   = 26

   Terlihat bahwa det (A) = det (A^t) = 26 (terbukti)

2. Buktikan bahwa det(A.B) = det (A) . det (B) untuk matrik berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   ➢ $A . B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2+7+0 & -2+1+0 & 6+2+0 \\ 3+28+0 & -3+4+0 & 9+8+0 \\ 0+0+10 & 0+0+0 & 0+0+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 31 & 1 & 17 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A.B) = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 8 \\ 31 & 1 & 17 \\ 10 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 9 & -1 \\ 31 & 1 \\ 10 & 0 \end{matrix}$$

= 18 + (-170) + 0 – 80 – 0 – (-60) = -170

- det (A) = $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ = 16 +0+0-0-0-6 = 10
- det (B) = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -1 \\ 7 & 1 \\ 5 & 0 \end{matrix}$ = 1 + (-10) +0 -15-0-(-7) = -17
- det (A) . det (B) = 10 × (-7) = -170
- jadi det(A.B) = det (A) . det (B) = -170

2.4 Ekspansi Kofaktor; Kaidah Cramer

DEFINISI :

Jika A adalah matrik kuadrat maka minor entri a_{ij} adalah determinan sub matrik tetap setelah baris ke-i dan kolom ke-j dihapus dari matrik A, yang ditulis M_{ij} . Adapun kofaktor entri a_{ij} yang dinyatakan oleh C_{ij} adalah bilangan $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

CONTOH :

Jika $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, maka :

- Minor entri a_{11} adalah : M_{11} = $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ = 16
- Kofaktor entri a_{11} adalah C_{11} = $(-1)^{1+1} M_{11}$ = 1. 16 = 16

Menentukan determinan dengan menggunakan ekspansi kofaktor caranya adalah dengan mengalikan entri-entri dalam satu baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil kali-kali yang diperolehnya.

DEFINISI :

Determinan sebuah matrik A yang berukuran n × n dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri di dalam satu baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil-hasil perkalian yang dihasilkan, yakni untuk setiap I ≤ j ≤ n , maka :

- det (A) = $a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \ldots + a_{nj} C_{nj}$

  (ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)
- det (A) = $a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \ldots + a_{in} C_{in}$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i)

CONTOH : $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ maka :

- ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-1 :

  $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1.16 = 16$

  $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1).10 = -10$

  $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1.3 = 3$

  Jadi det (A) = $a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} = 3.16 + 1.(-10) + (-4).3$
  = 26

- ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-1 :

  $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16 \Rightarrow C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1.16 = 16$

  $M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 24 \Rightarrow C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1).24 = -24$

  $M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 26 \Rightarrow C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 1.26 = 26$

  Jadi det (A) = $a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} = 3.16 + 2\,(-24) + 1.26$
  = 26

- Terlihat bahwa hasil determinan dengan dua cara di atas adalah sama.

Ekspansi kofaktor juga dapat digunakan untuk menentukan suatu matrik yang dapat dibalik,

TEOREMA :

Jika A adalah matrik n×n maka invers dari matrik A yang ditulis A^{-1} dapat dicari dengan menggunakan ekspansi kofaktor dengan cara sebagai berikut :

1. Tentukan determinan dari A atau $|A|$
2. Tentukan matriks kofaktor dari A :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

3. Tentukan matrik Adjoin (A) yaitu matrik yang didapat dengan mentranspose matrik kofaktor dari A
4. $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ Adj (A)

CONTOH : tentukan Invers dari matrik $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Jawab :

- Dengan mencari minor entri dan kofaktornya kita dapatka det(A) = 26
- Matrik kofaktor dari A adalah :

$$\begin{bmatrix} 16 & -10 & 3 \\ -24 & 28 & -11 \\ 24 & -26 & 13 \end{bmatrix}$$

- Adj (A) = $\begin{bmatrix} 16 & -24 & 24 \\ -10 & 28 & -26 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}$ Adj (A) = $\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 16 & -24 & 24 \\ -10 & 28 & -26 \\ 3 & -11 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{13} & \frac{-12}{3} & \frac{12}{13} \\ \frac{-5}{13} & \frac{14}{13} & -1 \\ \frac{3}{26} & \frac{-11}{26} & \frac{13}{26} \end{bmatrix}$

Ekspansi kofaktor juga dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaa linear .

TEOREMA :

Jika AX = B adalah sebuah sistem yang terdiri dari n persamaan dan peubah (matrik bujur sangkar) sehingga det (A) ≠ 0, sistem tersebut mempunyai penyelesaian sebagai berikut :

$$X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} \;,\; X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \;,\; \ldots. \;,\; X_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

Inilah yang biasa disebut dengan kaidah Cramer , di mana A_j adalah matrik yang didapatkan dengan menggantikan entri-entri di dalam kolom ke-j dari matrik A dengan entri-entri matrik hasil (matrik B).

CONTOH :

Gunakanlah Kaidah Cramer untuk memecahkan Himpunan Penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut :

$$X_1 + 2X_2 = 6$$
$$-3X_1 + 4X_2 + 6X_2 = 30$$
$$-X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 8$$

Jawab :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Maka $X_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}$

$X_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11}$

$X_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$

Jadi HP = { $\frac{-10}{11}, \frac{18}{11}, \frac{38}{11}$ }

LATIHAN SOAL BAB 2

1. Hitunglah Determinan matrik berikut menggunakan hasil perkalian elementer yang bertanda:

   a. $A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} k & -3 & 9 \\ 2 & 4 & k+1 \\ 1 & k^2 & 3 \end{bmatrix}$

2. Hitunglah determinan matrik berikut menggunakan reduksi baris :

   a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. Anggaplah det (A) = 5. Di mana : $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ maka carilah :

   a. det (3A) b. det($2A^{-1}$) c. det $\begin{bmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{bmatrix}$

4. tentukan minor dan kofaktor entri a_{12} dari matrik :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Tentukan minor dan kofaktor entri a_{21} dari matrik :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

6. Tentukan determinan matrik $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan ekspansi kofaktor berdasarkan :

   a. Baris kedua b. kolom kedua

7. Dengan ekspansi kofaktor, tentukan invers dari matrik :

   a. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

8. Gunakan aturan Cramer untuk mencari nilai z tanpa mencari nilai x, y, dan w, jika :

$$4x + y + z + w = 6$$
$$3x + 7y - z + w = 1$$
$$7x + 3y - 5z + 8w = -3$$
$$x + y + z + 2w = 3$$

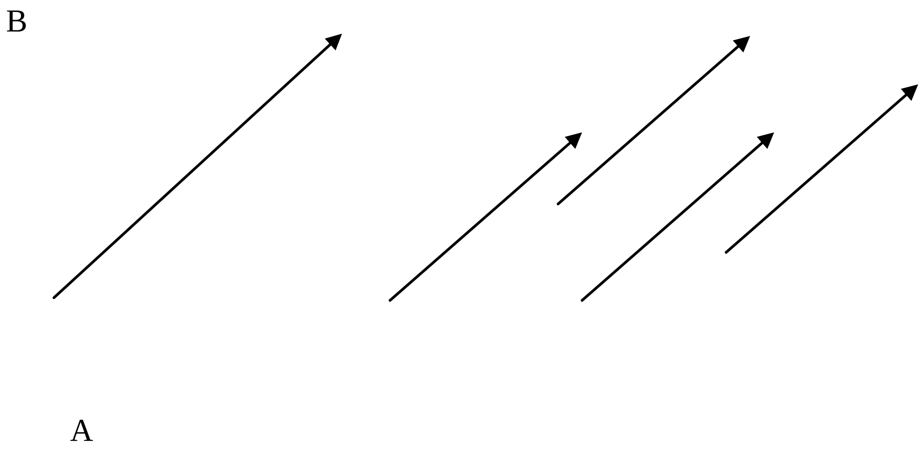
Kunci Jawaban :

1. a. 425 b. $-k^4 - k^3 + 18k^2 + 9k - 21$
2. a. -21 b. 4
3. a. 135 b. $\frac{8}{5}$ c. -5
4. $M_{12} = 11$ $C_{12} = -11$
5. $M_{21} = 2$ $C_{21} = -2$
6. a. -71 b. -71
7. a. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{20}{71} & \frac{2}{71} & \frac{3}{71} \\ \frac{-11}{71} & \frac{6}{71} & \frac{9}{71} \\ \frac{28}{71} & \frac{17}{71} & \frac{-10}{71} \end{bmatrix}$ b. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{20}{41} & \frac{2}{41} & \frac{-3}{41} \\ \frac{-19}{41} & \frac{-6}{41} & \frac{9}{41} \\ \frac{-12}{41} & \frac{7}{41} & \frac{10}{41} \end{bmatrix}$
8. z = 2

BAB III
VEKTOR-VEKTOR DALAM RUANG-2 DAN RUANG-3

3.1 Pengantar Kepada Vektor (Geometrik)

Vektor-vektor dalam dinyatakan secara geometris sebagai segmen-segmen garis yang terarah atau panah-panah di dalam ruang-2 atau ruang-3; arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menyatakan besarnya. Ekor panah dinamakan **titik permulaan (initial point)** dari vektor, dan ujung panah dinamakan **titik terminal (terminal point). Kita akan** menyatakan vektor dengan huruf kecil tebal **a, k, v, w** dan **x**. Bila membicarakan vektor, maka kita akan menyatakan bilangan sebagai ***skalar*.** Semua skalar merupakan bilangan riel dan akan dinyatakan oleh huruf kecil biasa seperti *a, k, v* dan *x.*



(a) (b)

(a) Vektor AB. (b) Vektor-vektor ekivalen

Di dalam gambar (*a)* titik permulaan sebuah vektor **v** adalah A dan titik terminalnya adalah B, maka kita menuliskan **v** = **AB**

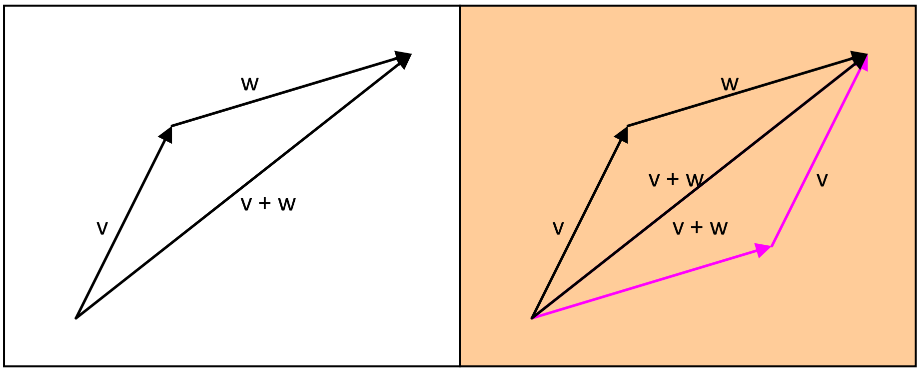
Vektor-vektor yang mempunyaipanjang yang sama, seperti vektor-vektor di dalam Gambar (*b)* dinamakan ***ekivalen.*** Jika **v** dan **w** ekivalen maka dapat ditulis **v = w**

Definisi. Jika **v** dan **w** adalah sebarang dua vektor,maka jumlah **v** + **w** adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut. Dudukkanlah vektor **w** sehingga titik permulaannya berimpit dengan titik terminal dari **v.** Vektor **v** +**w** dinyatakan oleh panah dari titik permulaan dari **v** kepada titik terminal dari **w** (Gambar *a*).

Di dalam Gambar *b* kita telah membentuk dua jumlah, yakni **v** + **w** (panah hitam) dan **w** + **v** (panah merah muda). Jelaslah bahwa

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$$

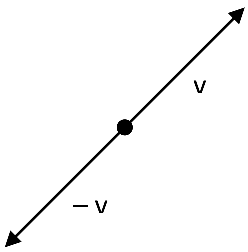
dan bahwa jumlah tersebut berimpit dengan diagonal dari paralelogram yang ditentukan oleh **v** dan **w** bila vektor-vektor ini diletakkan sehingga vektor-vektor tersebut mempunyai titik permulaan yang sama.



(a) aturan segitiga (b) aturan jajargenjang

Vektor yang panjangnya sama dinamakan ***vektor nol(zero vector)*** dan dinyatakan dengan **0.** kita mendefinisikan

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$$

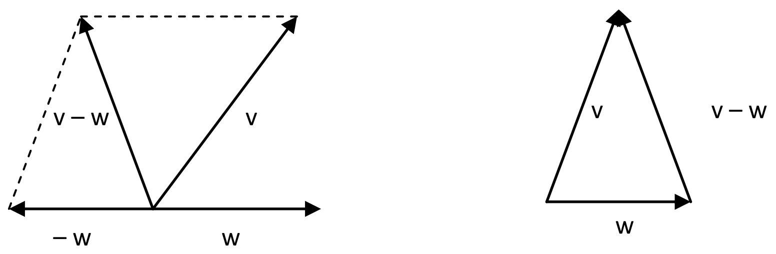


Definisi. Jika v dan w adalah sebarang dua vektor, maka pengurangan didefinisikan oleh

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{v} + (-\,\mathbf{w})$$

(Gambar *a*).

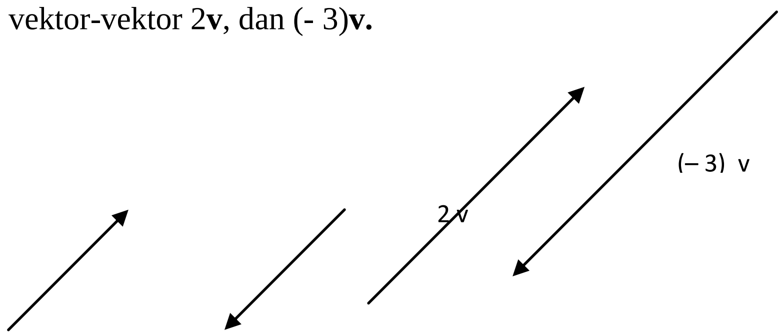
untuk mendapatkan selisih **v – w** tanpa menggambarkan – **w**, maka dudukkanlah **v** dan **w** sehingga titik-titik permulaannya berimpit; vektor dari titik terminal dari **w** ke titik terminal dari **v** adalah vektor **v – w** (Gambar *b*).



(a) (b)

Definisi. Jika **v** adalah sebuah vektor dan *k* adalah sebuah bilangan riel (skalar), maka **hasil perkalian***k***v** didefinisikan sebagai vektor yang panjangnya |*k*| kali panjang dari **v** dan yang arahnya adalah sama seperti arah dari **v** jika *k*> 0 dan berlawanan dengan arah **v** jika *k*< 0. kita mendefinisikan *k***v = 0** atau **v = 0**

Gambardi bawah melukiskan hubungan di antara sebuah vektor **v** dan vektor-vektor 2**v**, dan (- 3)**v.**

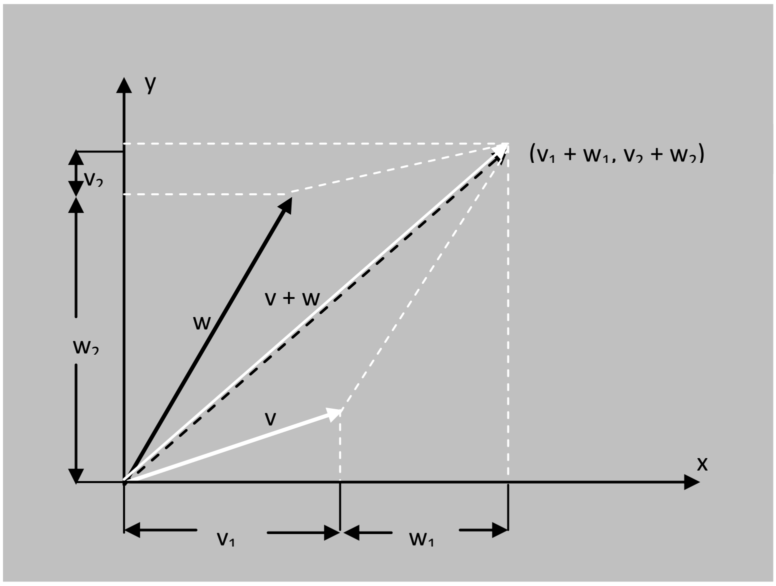


v (– 1) v

operasi penambahan vektor dan operasi perkalian oleh skalar sangat mudah untuk dilaksanakan di dalam komponen-komponen.seperti yang dilukiskan di dalam gambar di bawah , jika **v** = (v_1, v_2) dan **w** = (w_1, w_2)

maka

v + w = ($v_1 + w_1$, $v_2 + w_2$)



jika **v** = (v_1, v_2) dan *k* adalah sebarang skalar, maka dengan menggunakan argumentasi geometrik yang melibatkan segitiga-segitiga yang serupa, dapat diperlihatkan bahwa *k***v** = (kv_1, kv_2)

jadi misalnya jika **v** = (1, -2) dan **w** = (7, 6), maka

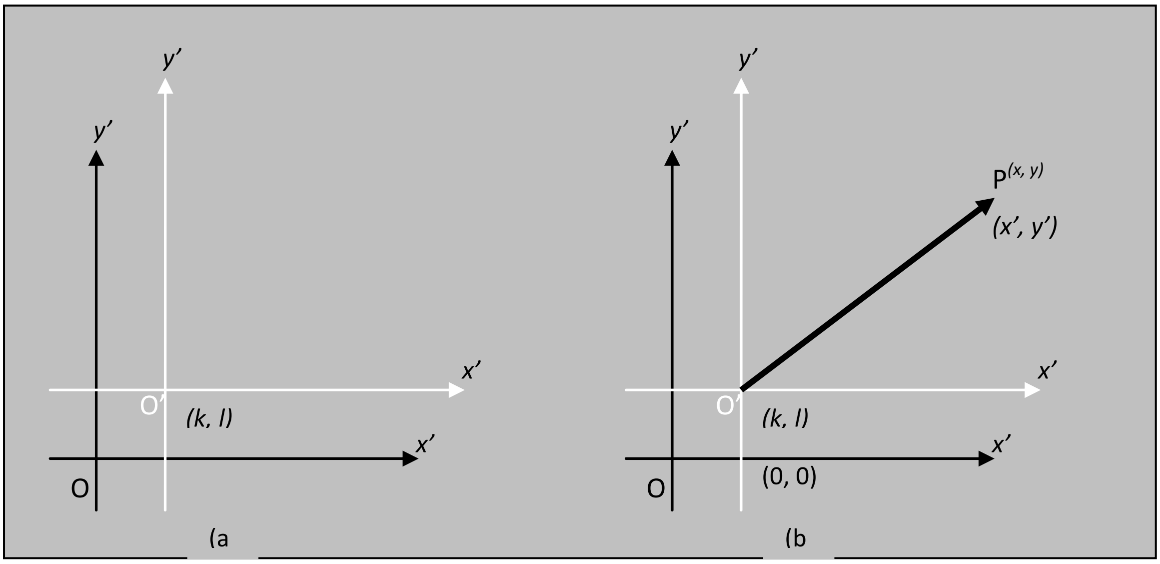
$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (1, -2) + (7, 6) = (1 + 7, -2 + 6) = (8, 4)$$

dan

$$4\mathbf{v} = 4(1, -2) = (4(1), 4(-2)) = (4, -8)$$

Pemecahan dalam soal dapat disederhanakan dengan mentranslasikan sumbu-sumbu koordinat untuk mendapatkan sumbu-sumbu baru yang sejajar dengan sumbu-sumbu aslinya.

Dalam Gambar *a* di bawahtelah ditranslasikan sumbu-sumbu koordinat *xy* untuk mendapatkan sebuah sistem koordinat *x'y'* yang titik asalnya *O'* berada di titik (*x*, *y*) = (*k*, *l*). Sebuah titik P di dalam ruang-2 sekarang mempunyai kedua-dua koordinat (*x*, *y*) dan koordinat (*x', y'*).



Untuk melihat bagaimana kedua koordinat tersebut dihubungkan, maka tinjaulah vektor O'P Gambar *b* di dalam sistem *xy* titik pemulaannya berada di (*k*, *l*) dan titik terminalnya berada di (*x*, *y*); jadi OP = (*x* – *k*, *y* – *l*). Di dalam sistem $x'y'$ titik permulaannya berada di (0,0) dan titik terminalnya berada di (x', y'); jadi OP = (x', y'). Maka

$$x' = x - k \quad y' = y - l$$

Persamaan-persamaan ini dinamakan persamaan translasi

Untuk melukiskannya, jika titik asal yang baru tersebut berada di (k, l) = (4, 1) dan koordinat-koordinat *xy* dari sebuah titik P adalah (2, 0), maka koordinat-koordinat $x'y'$ dari P adalah x'= 2 -4 = -2 dan y' = 0 – 1 = -1

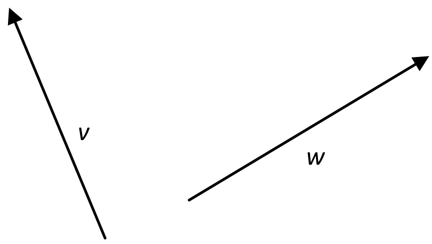
Di dalam ruang-3 persamaan translasi adalah

$$x' = x - k \quad y' = y - l \quad z' = z - m$$

di mana (k, l, m) adalah koordinat-koordinat *xyz* dari titik asal yang baru

Latihan:

1) Diberikan vektor v dan w seperti pada gambar. Lukislah vektor v + w dengan aturan segitiga dan jajargenjang.



2) Diberikan vektor-vektor sebagai berikut
   u = (3, 4)   dan   w = (5, -4)

   Tentukan

   a) u + w
   b) u – w

Jawab:

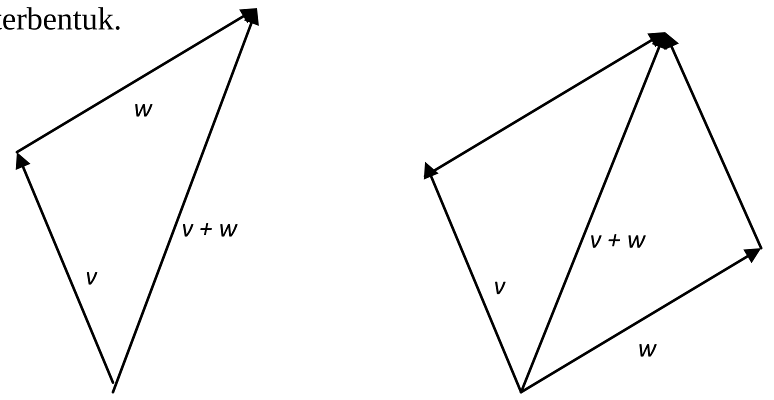
1) Aturan *segitiga*
   Keterangan: v + w

- Translasikan vektor w sehingga titik pangkal w berimpit dengan titik ujung vektor v
- Jumlah vektor v dan w adalah v + w, yaitu suatu vektor yang ditarik dari titik pangkal vektor v ke titik ujung vektor w.

  Aturan *Jajargenjang*

  Keterangan: v + w

- Translasikan vektor w (atau v) sehingga titik pangkal w berimpit.
- Dari titik ujung v, lukis suatu vektor yang sama dengan w; dari titik ujung w, lukis suatu vektor yang sama dengan vektor v.
- Jumlah vektor v dan w adalah v + w, yaitu diagonal jajargenjang yang terbentuk.



2) a) u + v = (3, 4) + (5, -4) = (3 + 5, 4 + -4) = (8, 0)

   b) u – w = (3, 4) – (5, -4) = (3 – 5, 4 – (-4)) = (-2, 8)

3.2 Norma Sebuah Vektor ; Ilmu Hitung Vektor

Teorema 1

Jika *u,v dan w* adalah vector-vektor di dalam ruang-2 atau ruang-3 dan *k* dan *l* adalah scalar, maka hubungan yang berikut akan berlaku :

a. $u + v = v + u$

b. $(u + v) + w = u + (v + w)$

c. *u + 0 = 0 + u = 0*

d. *u + (-u) = 0*

e. *k(lu) = (kl) u*

f. *k (u + v) = ku + kv*

g. *(k + l)u = ku + lu*

h. l*u = u*

bukti :

b. Secara analitik

jika u = ($u_1 \quad u_2 \quad u_3$), v = ($v_1 \quad v_2 \quad v_3$), w = ($w_1 \quad w_2 \quad w_3$)

$(u + v) + w = [(u_1 \quad u_2 \quad u_3) + (v_1 \quad v_2 \quad v_3) + (w_1, w_2, w_3,)]$

$= (u_1 + v_1, \quad u_2 + v_2, \quad u_3 + v_3) + (w_1, w_2, w_3,)$

$= ([u_1 + v_1,] + w_1, [u_2 + v_2] + w_2, [u_3 + v_3] + w_3,)$

$= (u_1 + [v_1, + w_1], [u_2 + [v_2] + w_2], [u_3 + [v_3] + w_3]$

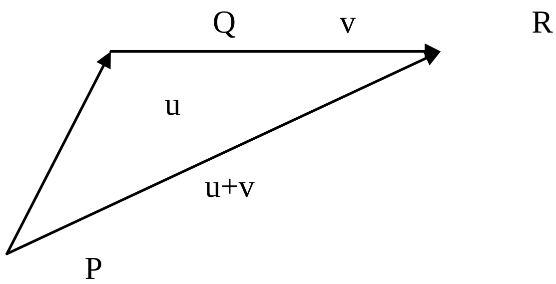
$= (u_1 \quad u_2 \quad u_3) + ([v_1, + w_1], (v_2 + w_2), (v_3 + w_3))$

= u + (v + w)

Panjang sebuah vector v seringkali dinamakan *norma* dari v dan dinyatakan dengan ||v||.

Norma sebuah vector v = (v_1, v_2) di dalam ruang-2 adalah :

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$



Misalkan v = ($v_1 \quad v_2 \quad v_3$), di dalam ruang-3 :

$$\|v\| = \sqrt{v_1{}^1 + v_2{}^2 + v_3{}^3}$$

Jika $P_1\ (x_1, y_1, z_1) dan P_2\ (x_2, y_2, z_2)$ adalah dua titik didalam ruang-3, maka jarak antara kedua titik tersebut adalah norma vector $\overrightarrow{P_1P_2}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_{2-}x_1, y_2 - y_1, z_{2-}z_1)$$

Maka

$$d = \sqrt{(x_{2-}x_1)^2 + (y_2 - y_{1)}{}^2 + (z_{2-}z_1)^2}$$

Latihan:

1. Norma vector v = (-3,2,1) adalah ?

jawab :

$\|v\| = \sqrt{-3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$

2. Jarak antara P1 (2, -1, -5) dan titik P2 (4, -3, 1) adalah

jawab :

$d = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2}$

$= \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

3.3 Perkalian Titik; Proyeksi

Definisi:

jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor didalam ruang-2 dan ruang-3 dan θ adalah sudut diantara **u** dan **v,** maka perkalian titik (dot product) atau perkalian dalam euklidis (Euclidean inner product) u.v didefinisikan oleh:

1. $$\boldsymbol{u.v} = \begin{cases} \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\| \cos\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{jika\ u \neq 0\ dan\ v \neq 0} \\ \boldsymbol{0} \qquad\qquad\quad , \boldsymbol{jika\ u = 0\ dan\ v = 0} \end{cases}$$

2. $\boldsymbol{u.v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$, jika **u** dan **v** adalah dua vektor di dalam ruang-3.

3. $\boldsymbol{u.v = u_1v_1 + u_2v_2}$, jika **u** dan **v** adalah dua vektor di dalam ruang-2.

Teorema 2

Misalkan **u** dan **v** adalah vector-vektor di dalam ruang-2 atau ruang-3, maka:

1. $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^2; yakni\ \|\boldsymbol{v}\| = (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v})^{1/2}$
2. jika **u** dan **v** adalah vector-vektor tak nol dan $\boldsymbol{\theta}$ adalah sudut diantara kedua vector tersebut, maka:
   a. $\boldsymbol{\theta}$ lancip $\Leftrightarrow \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} > 0$
   b. $\boldsymbol{\theta}$ tumpul $\Leftrightarrow \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} < 0$
   c. $\boldsymbol{\theta} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Teorema 3

Jika **u,v** dan **w** adalah vector-vektor di dalam ruang-2 atau ruang-3 dan ***k*** adalah sebuah scalar, maka:

1. $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}$
2. $\boldsymbol{u}.(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}.\boldsymbol{w}$
3. $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{ku}).\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}.(\boldsymbol{kv})$
4. $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} > 0\ jika\ \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}\ dan\ \ \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\ jika\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor tak nol di dalam ruang-2 atau ruang-3, $\boldsymbol{w_1}$ adalah proyeksi orthogonal dari **u** pada **v** dan vector $\boldsymbol{w_2}$ adalah komponen dari **u** yang orthogonal kepada **v,** maka:

1. $\boldsymbol{w_1} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}.\boldsymbol{v}$
2. $\boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}.\boldsymbol{v}$

Contoh:

Jika $\boldsymbol{u} = (2,3,-1)$ dan $\boldsymbol{v} = (-2,-4,4)$

Tentukan:

a. ***u.v***

b. cosines sudut θ diantara ***u*** dan ***v***

c. proyeksi orthogonal dari ***u*** pada ***v***

jawab:

a. $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = (2)(-2) + (3)(-4) + (-1)(4) = -20$

b. $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{-20}{\sqrt{14}\sqrt{36}} = -\frac{20}{6\sqrt{14}}$

c. $\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|^2}.\boldsymbol{v} = \frac{-20}{(\sqrt{36})^2}(-2,-4,4) = (\frac{10}{9}, \frac{20}{9}, -\frac{20}{9})$

Latihan:

1. carilah ***u.v*** dari:

a. $\boldsymbol{u} = (1,-1)$ dan $\boldsymbol{v} = (4,3)$

b. $\boldsymbol{u} = (1,3,-2)$ dan $\boldsymbol{v} = (4,-2,4)$

2. carilah cosines sudut θ diantara ***u*** dan ***v***, jika:

a. $\boldsymbol{u} = (2,-5)$ dan $\boldsymbol{v} = (-2,5)$

b. $\boldsymbol{u} = (2,1,-3)$ dan $\boldsymbol{v} = (-1,3,-2)$

3. dari soal no. 2 carilah proyeksi orthogonal dari ***u*** pada ***v***

pembahasan:

1. a. $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = (1)(4) + (-1)(3) = 1$

   b. $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = (1)(4) + (3)(-2) + (-2)(4) = -10$

2. **a.** $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{-29}{\sqrt{29}\sqrt{29}} = -\frac{29}{29} = -1$

   b. $\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$

3. a. $$w_1 = \frac{u.v}{\|v\|^2}.v = \frac{-29}{(\sqrt{29})^2}(-2,5) = -1(-2,5) = (2,-5)$$

b. $$w_1 = \frac{u.v}{\|v\|^2}.v = \frac{7}{(\sqrt{14})^2}(-1,3,-2) = (-\frac{1}{2},\frac{3}{2},-1)$$

3.4. Perkalian Silang

1. Definisi

Jika u = (u_1, u_2, u_3) dan v = (v_1, v_2, v_3) adalah vektor-vektor di dalam ruang 3, maka perkalian silang u x v adalah vektor-vektor yang didefinisikan oleh:

u x v = ($u_2v_3 – u_3v_2, u_3v_1 – u_1v_3, u_1v_2 – u_2v_1$)

atau di dalam notasi determinan:

u x v = $\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)$

Pola determinan di atas berasal dari:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Komponen pertama dengan menghapus kolom pertama.

Komponen kedua dengan menghapus kolom kedua.

Komponen ketiga dengan menghapus kolom ketiga.

Contoh:

Carilah u x v dimana u = (1, 2, -2), v = (3, 0, 1)

Penyelesaian: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

u x v = $\left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}\right)$

= (2, -7, -6)

Catatan : Perkalian titik dua vektor adalah skalar

Perkalian silang dua vektor adalah vektor lain.

2. Teorema-teorema hubungan perkalian titik dan perkalian silang

Jika u dan v adalah vektor-vektor di ruang-3, maka:

a. u . (u x v) = 0 (u x v ortogonal terhadap u)

b. $v \cdot (u \times v) = 0$ (u x v ortogonal terhadap v)

c. $\| u \times v \|^2 = \| u \|^2 \| v \|^2 - (u \times v)^2$

Bukti:

Misalkan $u = (u_1, u_2, u_3)$ dan $v = (v_1, v_2, v_3)$

a. $u \cdot (u \times v) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$

$= u_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2 (u_3 v_1 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - u_2v_1)$

$= 0$

b. Serupa dengan (a)

c. $\| u \times v \|^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2$

$= (u_2 v_3)^2 + (u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1)^2 + (u_1v_3)^2 + (u_1v_2)^2 + (u_2v_1)^2$

$-2 (u_2 v_3 u_3 v_2) -2 (u_3 v_1 u_1v_3) -2 (u_1v_2 u_2v_1)$

$\| u \|^2 \| v \|^2 - (u \cdot v)^2 = (u_{1\,+}\, u_{2\,+}\, u_3)^2 + (v_1, v_2, v_3)^2 - (u_1 v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2$

$= (u_2 v_3)^2 + (u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1)^2 + (u_1v_3)^2 + (u_1v_2)^2 + (u_2v_1)^2$

$-2 (u_2 v_3 u_3 v_2) -2 (u_3 v_1 u_1v_3) -2 (u_1v_2 u_2v_1)$

Contoh: u = (1, 2, -2) dan v = (3, 0, 1)

u x v = (2, -7, -6)

maka u . (u x v) = 1 . 2 + 2 . (-7) + (-2) (-6) = 0

u . (u x v) = 3 . 2 + 0 . (-7) + 1 . (-6) = 0

3. Sifat-sifat ilmu hitung utama dari perkalian hitung

Teorema: jika u, v, dan w adalah vektor-vektor sembarang di dalam ruang-3 dan k adalah sembarang skalar, maka:

a. u x v = - (v x u)

b. u x (v + w) = (u x v) + (u x w)

c. (u + v) + w = (u x w) + (v x w)

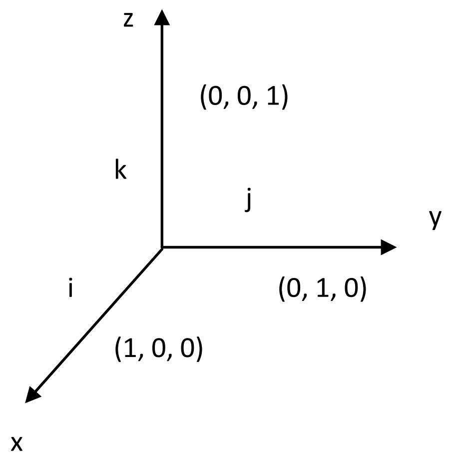
d. k (u x v) = (ku) x v = u x (kv)

e. u x 0 = 0 x u = 0

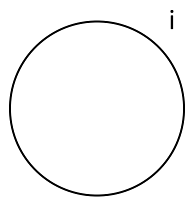
f. u x u = 0

4. Contoh

Tinjaulah vektor-vektor i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)
Masing-masing mempunyai panjang l dan terletak sepanjang sumbu ordinat yang dinamakan vektor-vektor satuan standar di dalam ruang-3.
Tiap vektor v = (v_1, v_2, v_3) dapat dinyatakan i, j, dan k, yang dituliskan.
v = (v_1, v_2, v_3) = v_1 (1, 0, 0) + v_2 (0, 1, 0) +v_3 (0, 0, 1) = v_1i +v_2j +v_3k
misal: (2, -3, 4) = 2i -3j + 4k



Atau dalam notasi determinan dinyatakan
i x j = $\left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$ = (0, 0, 1) = k
hasil-hasil perkalian silang:
i x i = j x j = k x k = 0
i x j = k, j x k = i, k x i = j
j x i = -k, k x j = -i, i x k = -j
atau dalam diagram:

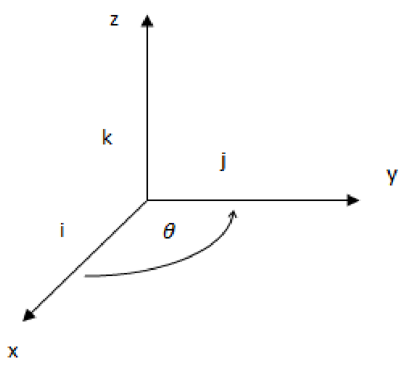


Keterangan:

a. Putaran searah karum jam, perkalian dua vektor adalah vektor berikutnya.

b. Putaran berlawanan arah jarum jam, perkalian dua vektor adalah negatif vektor berikutnya.

Atau menggunakan kaidah tangan kanan:



Keterangan

y = ibu jari

jika i dihimpitkan ke j sepanjang θ maka hasilnya adalah k

i x j = k

5. Jika u x v adalah vektor tak nol dalam ruang-3, maka norm dari u x v mempunyai tafsiran geometrik yang berguna.

Yaitu identitas lagrange yang dinyatakan:

$\| u \times v \|^2 = \| u \|^2 \| v \|^2 - (u \times v)^2$

Jika θ adalah sudut antara u dan v, maka $u \cdot v = \| u \| \cdot \| v \| \cos \theta$

Sehingga: $\| u \times v \|^2 \quad = \| u \|^2 \| v \|^2 - \| u \|^2 \| v \|^2 \cos \theta$

$= \| u \|^2 \| v \| (1 - \cos^2 \theta)$

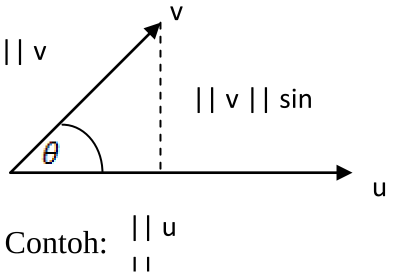
$= \| u \|^2 \| v \|^2 \sin^2 \theta$

Jadi $\| u \times v \| = \| u \| \| v \| \sin^2 \theta$

Tetapi $\| v \|^2 \sin^2 \theta$ adalah tinggi paralelogram dari u x v, jadi luas A dari paralelogram dinyatakan.

A = (alas) (tinggi) = $\| u \| \| v \| \sin^2 \theta = \| u \times v \|$

Dengan kata lain, norm dari u x v sama dengan luas paralelogram yang ditentukan oleh u dan v.



Contoh:

Carilah luas segitiga yang ditentukan oleh titik-titik P_1 (2, 2, 0), P_2 (-1, 0, 2), P_3 (0, 4, 3)

Pemecahan:

Luas A dari segitiga tersebut adalah ½ luas pralelogram yang ditentukan oelh vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ dan $\overrightarrow{P_2P_3}$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ = (-3, -2, 2)

$\overrightarrow{P_2P_3}$ = (-2, 2, 3)

$\overrightarrow{P_1P_2}$ x $\overrightarrow{P_2P_3}$ = (-10, 5, -10)

Dan sebagai konsekuensinya

A = ½ $\| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} \|$ = ½ (15) = 15/2

3.5 **Garis dan Bidang di ruang-3**

Persamaan Bidang

Titik P_0 (x_0, y_0, z_0) dan vector tak nol n (a, b, c) sebagai normal. Titik P (x, y, z) untuk $\overrightarrow{P_0P}$ ortogonal n, yang bisa dituliskan $\overrightarrow{P_0P}$ n, dimana n . $\overline{P_0P}$ = 0. Karena n = (a, b, c) dan $\overline{P_0P}$ = ($x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$), maka dapat dituliskam kembali menjadi :

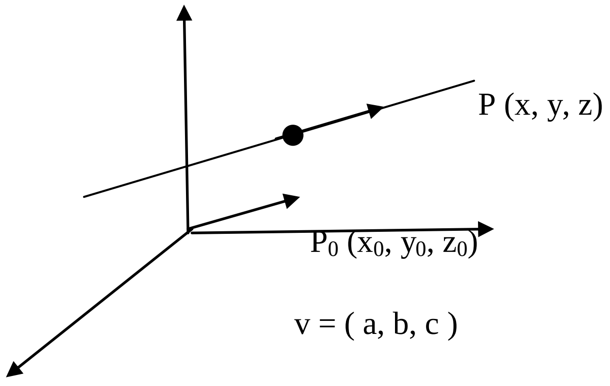
$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ (bentuk normal titik)

Teorema 6. Jika a, b, c dan d adalah konstanta dan a, b dan c tidak semuanya nol, maka grafik persamaan ax + by +cz = 0 adalah sebuah bidang yang mempunyai vector n = (a, b, c) sebagai normal.

Bukti:

$ax + by + cz = 0 \longrightarrow a\left(x + \left(\frac{d}{a} \right)\right) + by + cz = 0$, dimana n $\left(\frac{-d}{a}, 0, 0 \right)$

Sekarang, bagaimana mendapatkan persamaan untuk garis di dalam R-3. Misalkan *l* adalah garis di dalam R-3 yang melalui titik P_0 (x_0, y_0, z_0) dan yang sejajar dengan vector tak nol v = (a, b, c).



Dari gambar tersebut, dapat dilihat bahwa *l* persis terdiri dari titik-titik P (x, y, z) untuk mana $\overline{P_0P}$ sejajar dengan v, yang mana terdapat sebuah scalar t, sehingga :

$\overline{P_0P}$ = tv

($x-x_0$,, $y-y_0$, $z-z_0$) = t (a, b, c)

Dari komponen-komponen diatas dapat diperoleh, persamaan parametric, yaitu :

$x = x_0 + ta$

$y = y_0 + tb$ dimana $-\infty < t < \infty$

$z = z_0 + tc$

Sedang untuk a, b, c $\neq$ 0, maka :

$x = x_0 + ta \longrightarrow \frac{x-x_0}{a} = t$

$y = y_0 + tb \longrightarrow \frac{y-y_0}{b} = t$

$z = z_0 + tc \longrightarrow \frac{z-z_0}{c} = t$

BAB IV

RUANG-RUANG VEKTOR

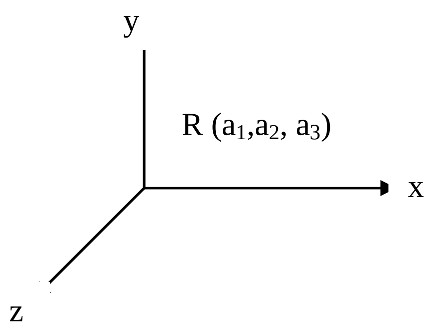
4.1 Ruang n-euclidis

Definisi I

Jika n adalah bilangan bulat positif maka tupel n terorde adalah sebuah bilangan real { $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ }

Himpunan semua tupel n terorde dinamakan ruang-n (R^n)

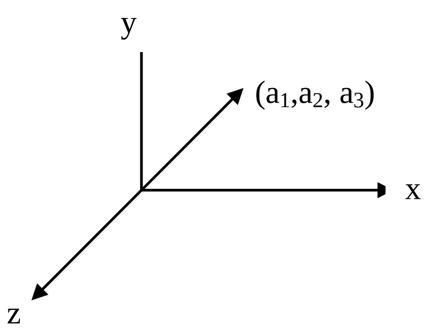
1. Tupel terorde { $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ }, dapat dipandang sebagai:



Contoh : R^3

2. Vektor, di ruang R^n

   Contoh : R^3



Definisi II

Dua vektor $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ pada ruang R^n dan k suatu skalar maka dikatakan:

1. Sama, jika $u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$
2. Penjumlahan $u + v = \{c\}$
3. Perkalian skalar $ku = ku_1, ku_2, \ldots, ku_n$

4. Invers penjunlahan u adalah –u = {$-u_1$, $-u_2$, . . . , $-u_n$)
5. Vektor nol = 0 = { 0, 0, . . . , 0 }

Teorema 1

Jika u, v, w adalah vektor-vektor dalam R^n dan k, l, adalah suatu skalar, maka berlaku:

a. u + v = v + u
b. u + (v + w) = (u + v) + w
c. u + 0 = 0 + u = u
d. u + (-u) = 0, yakni u – u = 0
e. k (lu) = (kl) u
f. k (u + v) = ku + kv
g. (k + l) u = ku + lu
h. 1u = u

Definisi 3

Jika u, v, dan w adalah vektor-vektor dalam R^n, maka perkalian dalam euclidisnya dalah

$u \cdot v = u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n$

Teorema 2

Jika u, v, dan w adalah vektor-vektor dalam R^n dan k adalah sembarang skalar, maka:

a. u . v = v . u
b. (u + v) . w = u . w + v . w
c. (ku) . v = k (u . v)
d. v . v $\geq$ 0, maka berlaku v . v = 0 $\Leftrightarrow$ v = 0

Definisi 4

1. Jika u, v adalah vektor-vektor pada R^n maka norma/panjang euclides vektor u adalah

$$\| u \| = (u \cdot u)^{1/2}$$
$$= (u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + u_n \cdot u_n)^{1/2}$$
$$= (u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)^{1/2}$$
$$= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots u_n^2}$$

$$\boxed{\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots u_n^2}}$$

2. Jarak euclides titik u dan v adalah:

d (u, v) = ‖ u – v ‖

d (u, v) = ‖ u . v ‖ = $\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + . . . + (u_n - v_n)^2}$

Contoh:

Jika u = (2, 0, -1, 3), v = (5, 4, 7, 1), w = (6, 2, 0, 9), tentukan:

a. v – (u + w)
b. x sehingga 2u - v + x = 7x + w

Jawab:

a. v – (u + v)

= (5, 4, 7, 1) – ((2, 0, -1, 3) + (6, 2, 0, 9))

= (5, 4, 7, 1) – (8, 2, -1, 12)

= (-3, 2, 8, -11)

b. 2u – v + x = 7x + w

2 (2, 0, -1, 3) – (5, 4, 7, 1) + x = 7x + (6, 2, 0, 9)

(4, 0, -2, 6) – (5, 4, 7, 1) + x = 7x + (6, 2, 0, 9)

(-1, -4, -9, 5) – (6, 2, 0, 9) = 6x

(-7, 6, -9, 4) = 6x

x = ($\frac{-7}{6}$, -1, $\frac{-3}{2}$, $\frac{-2}{3}$)

4.2 RUANG VEKTOR UMUM

Definisi : Misalkan V adalah sebarang himpunan benda, dimana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan riel)

- Operasi ***penjumlahan****(addition)* dapat diartikan sebagai suatu kaidah untuk mengasosiasikan setiap pasang benda **u** dan **v**di dalam *V* sebuah elemen **u** + **v**, yang disebut ***jumlah*** (sum) dari **u** dan **v**.
- Operasi ***perkalian skalar****(skalar multiplication)* dapat diartikan sebagai suatu kaidah untuk mengasosiasikan dengan setiap skalar *k* dan setiap benda **u** di dalam *V* sebuah elemen *k***u**, yang dinamakan ***kelipatan skalar*** *(scalar multiple)* dari **u** oleh *k*.

Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh benda **u, v, w** didalam *V* dan oleh semua skalar *k* dan *l*, maka kita namakan *V* sebuah ***ruang vektor*** *(vector space)* dan benda-benda didalam *V* kita namakan ***vektor.***

(1) Jika **u** dan **v** adalah benda-benda didalam *V*, maka **u** + **v** berada di dalam *V*

(2) **u** + **v** = **v** + **u**

(3) **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**

(4) Ada sebuah benda **0** di dalam *V* sehingga **0** + **u** = **u** + **0** = **u** untuk semua **u** di dalam *V*

(5) Untuk setiap **u** di dalam *V*, ada sebuah benda **–u** didalam *V* yang dinamakan negatif dari u sehingga **u** + (-**u**)= (-**u**) + **u** = **0**

(6) Jika *k* adalah sembarang bilangan riel dan **u** adalah senbarang benda di dalam *V*, maka *k***u** berada di dalam *V*

(7) *k* (**u** + **v**) = *k***u** + *k***v**

(8) (*k* + *l*) **u** = *k***u** + *l***u**

(9) *k*(*l***u**) = (*kl*) (**u**)

(10) 1**u** = **u**

Vektor **0** di dalam aksioma 4 dinamakan ***vektor nol (zero vektor)*** untuk *V*

Catatan : Skalar dapat berupa bilangan riel atau bilangan kompleks, tergantung pada aplikasinya. Ruang vektor dimana skalar-skalarnya adalah bilangan kompleks disebut ***ruang vektor kompleks*** *(complex vector space)*, dan ruang vektor dinama skalar-skalarnya merupakan bilangan real disebut ***ruang vektor real*** *(real vector space).*

Contoh:

1. Misalkan V adalah bidang sebarang yang melewati titik sembarang di R^3. Tunjukkan bahwa titik-titik pada V membentuk suatu ruang vektor dibawah operasi penjumlahan dan perkalian skalar standar untuk vektor-vektor pada R^3.
   Jawab: aksioma 2, 3,7, 8, 9 dan 10 berlaku untuk semua titik di R^3 dan sebagai konsekuensinya untuk semua titik pada bidang *V*. Oleh karena itu kita hanya perlu menunjukkan bahwa aksioma 1, 4, 5 dan 6 terpenuhi.
   Karena bidang *V* melewati titik asal, maka bidang tersebut memiliki persamaan berbentuk
   $$ax + by + cz = 0 \qquad (1)$$
   Jadi, jika **u** = (u_1, u_2, u_3) dan **v** = (v_1, v_2, v_3) adalah titik pada *V*, maka au_1, bu_2,cu_3= 0 dan av_1, bv_2, cv_3 = 0. Dengan menunjukkan persamaan-persamaan ini akan menghasilkan
   $$a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) + c(u_3 + v_3) = 0$$
   Kesamaan ini menunjukkan pada kita bahwa koordinat-koordinat pad titik
   u + **v** =$(u_1 + \ v_1, u_2 + \ v_2, u_3 + \ v_3,)$
   Memenuhi (1); jadi, **u + v**terletak pada bidang *V*. Ini membuktikan bahwa aksioma 1 dipenuhi. Dengan mengalikan$au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$dengan -1 maka akan memberikan
   $$a(-u_1) + b(-u_2) + c(-u_3) = 0$$
   Jadi - u = ($-u_1, -u_2, -u_3$) terletak di dalam *V*. Ini menghasilkan aksioma 5.

2. Misalkan V terdiri dari suatu objek tunggal, yang dinotasikan dengan 0, dan definisikan
   0 + 0 = 0 dan *k***0 = 0**
   Untuk semua skalar *k*. Pemeriksaan untuk mengetahui apakah semua aksioma ruang vektor telah terpenuhi dapat dilakukan dengan mudah. Kita menyebut ruang vektor ini sebagai ruang ***vektor nol*** *(zero vektor space)*
   Beberapa Sifat Vektor : Sejalan dengan semakin mendalamnya pembahasan kita, akan lebih banyak contoh ruang yang vektor yang dapat ditambahkan ke dalam daftar yang telah kita miliki. Kita akan menutup sub bab ini dengan suatu teorema yang berisi daftar sifat-sifat vektor yang berguna.
   Teorema 3

Misalkan$V$ adalah suatu ruang vektor, u adalah suatu vektor pada V, dan k adalah suatu skalar, maka:

a. $0\mathbf{u} = 0$
b. $k0 = 0$
c. $(-1)\mathbf{u} = \mathbf{-u}$
d. Jika $k\mathbf{u} = 0$, maka $k = 0$ atau $\mathbf{u} = 0$

Bukti

a. Kita dapat menulis

$0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = (0 + 0)\,\mathbf{u}$	Aksioma 8
$= 0u$	Sifat dari bilangan 0

Berdasarkan Aksioma 5, vektor $0\mathbf{u}$ memiliki bentuk negatif, $-0\mathbf{u}$. Dengan menambahkan negatifnya ini pada kedua ruas di atas akan menghasilkan

$[0u + 0u] + (-0u) = 0u + (-0u)$

Atau

$0\mathbf{u} + [0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})] = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})$	Aksioma 3
$0\mathbf{u} + 0 = 0$	Aksioma 5
$0\mathbf{u} = 0$	Aksioma 4

b. Untuk menunjukkan $(-1)\mathbf{u} = \mathbf{-u}$, perlihatkan bahwa $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$

$\mathbf{u} + (-1)\,\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u}$	aksioma 10
$= (1 + (1))\,\mathbf{u}$	aksioma 8
$= 0\mathbf{u}$	sifat dari bilangan
$\mathbf{=0}$	

SOAL

1. Misalkan $V = R^2$ dan definisikan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian skalar sebagai berikut : Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ dan $\mathbf{v} = (v_1,v_2)$ maka didefinisikan

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

dan jika k adalah bilangan real sembarang, maka definisikan

$$k\mathbf{u} = (ku_1, 0)$$

jawab;

Sebagai contoh, jika $\mathbf{u} = (2,4)$, $\mathbf{v} = (-3,5)$ dan $k = 7$, maka

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2 + (-3), 4 + 5) = (-1,9)$$

$$k\mathbf{u} = 7\mathbf{u} = (7\cdot 2, 0) = (14,0)$$

Operasi penjumlahan merupakan operasi penjumlahan standar pada R^2, tetapi operasi perkalian skalar bukan merupakan perkalian skalar standar.

2. Tunjukkan bahwa himpunan *V* dari semua matrik 2 x 2 dengan entri-entri real adalah suatu ruang vektor jika penjumlahan vektor didefinisikan sbagai penjumlahan matriks dan perkalian skalar vektor didefinisikan sebagai perkalian skalar matriks

   Jawab;

   $$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

   untuk membuktikan aksioma 1, kita harus menunjukkan bahwa **u + v** adalah suatu objek pada *V*. Atau dengan kata lain, kita harus menunjukkan bahwa

   u + v adalah suatu matriks 2 x2. Hal ini dapat diperoleh dari definisi penjumlahan matriks, karena

   $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{bmatrix}$$

   dengan cara serupa, aksioma 6 juga berlaku, karena untuk bilangan real sebarang *k*, kita memperoleh

   $$k\mathbf{u} = k \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix}$$

   sehingga *k***u** adalah matrik 2 x 2 dan sebagai konsekuaensinya merupakan objek pada *V*.

   Aksioma 2

   $$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

   Untuk membuktikan aksioma 4 kita harus menentukan suatu objek 0 pada *V* sedemikian rupa 0 + **u** = **u** + 0 = u untuk semua u pada V. Ini dapat dilakukan dengan memdefinisikan 0 sebagai

   $$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Dengan definisi ini

   $$0 + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

   Dan demikian juga **u** + 0. Untuk membuktikan aksioma 5, kita harus menunjukkan bahwa setiap objek u pada *V* memiliki bentuk negatif **–u** sedemikian rupa sehingga **u + (-u)** = 0 dan **(-u) + u** = 0. Ini dapat dilakukan dengan mendefinisikan dari u sebagai

   $$-\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}$$

   Dengan definisi ini

$$\mathbf{u} + (\mathbf{-u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Dan demikian juga (-u) + u = 0. Sehingga pada akhirnya, Aksioma 10 merupakan perhitungan yang sederhana

$$1\mathbf{u} = 1 \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

4.3 SUBRUANG

Definisi: Sebuah subhimpunan ***w*** dan sebuah ruang vektor ***v*** dinamakan sebuah subruang (subspac) dan ***v*** jika ***w*** itu sendiri adalah sebuah ruang vektor dibawah penambahan dan perkalian sekalar yang didevinisikan pada **v**.

Teorema 4: Jika ***w*** adalah sebuah himpunan dari satu atau lebih Vektor dari sebuah ruang Vektor ***v***, maka ***w*** adalah sebuah subruang dari ***v*** jika dan hanya jika kondisi-kondisi berikut berlaku.

(a) Jika ***u*** dan *v* adalah vektor-vektor di dalam ***w***, maka ***u*** + ***v*** berada didalam ***w***.

(a) Jika ***k*** adalah sembarang sekalar dan ***u*** adalah sembarang vektor di dalam ***w***, maka ***ku*** berada di dalam ***w***.

[Kondisi-kondisi (a) dan (b) sering kali dijelaskan dengan mengatakan bahwa ***w*** tertutup di bawah penambahan dan tertutup di bawah perkalian sekalar].

Contoh 12.

Himpunan ***w*** adalah semua matrik 2x2 dengan bilangan nol pada diagonal utamanya adalah subruang dari ruang vektor M_{22} dari semua matrik ***k*** 2x2.

Misal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

Adalah sembarang matrik dalam ***w*** dan ***k*** adalah sembarang sekalar.

Maka

$$kA=\begin{bmatrix}0 & ka_{12}\\ ka_{21} & 0\end{bmatrix} \text{ dan } A+B=\begin{bmatrix}0 & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & 0\end{bmatrix}$$

k*A** dan **A+B** mempunyai bilangan nol pada diagonal utama, maka ***k*A** dan **A+B** teletak di ***w. Jadi ***w*** sebuah subruang M_{22}.

Contoh 13:

Miasal ***n*** adalah bilangan bulat positif dan ***w*** terdiri dari fungsi nol yang polinomial real mempunyai derajat ≤***n*** dapat dinyatakan dalam bentuk

p(x) = $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ di mana $a_0,......,a_n$ adalah bikangan real.

Misalkan ***p*** dan ***q*** adalah polinomial-polinomial

P(x) = $a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$

q(x) = $b_0 + b_1x + ... + b_nx^n$

maka ***(p + q)(x)*** = p (x) + q (x) = ($a_0 + b_0$) + ($a_1 + b_1$)x + ...+ ($a_n + b_n$) x^n

dan ***(kp) (x) + kp (x)*** = *kp (x)* = (ka_0) + (ka_1)x + ...+ (ka_n) x^n

maka ***p+q*** dan ***kp*** terletak didalam ***w***. Kita nyatkan ruang vektor ***w*** di dalam contoh ini dengan simbol ***pn***.

Contoh 16:

Vektor *u* =(1,2,-1), *v*=(6, 4, 2) di R^3.

Tunjukan bahwa *w* =(9,2,7) adalah kombinasi linier dari *u* dan *v* dan w^1=(4,-1,8) bukanlah kombinasi linier dari *u* dan *v*.

Pemecahan: agar *w* kombinasi linear dari *u* dan *v*, harus ada sekalar k_1 dan k_2

Maka $w = k_1u + k_2v$

(9,2,7) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)

(9,2,7) = ($k_1 + 6k_2$, $2k_1 + 4k_2$, $-k_1 + 2k_2$)

Sehingga menjadi $k_1 + 6k_2 = 9$

$2k_1 + 4k_2 = 2$

$-k_1 + 2k_2 = 7$

Dengan memecahkan seperti ini akan menghasilkan

$k_1 = -3$, $k_2 = 2$

Sehingga w = -3u + 2v

Supaya w^1 adalah kombinasi linier dri u dan v, maka harus ada skalar k_1 dan k_2

Maka $w^1 = k_1$u + k_2v

(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)

(4, -1, 8) = $(k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$

Menjadi $k_1 + 6k_2 = 4$

$2k_1 + 4k_2 = -1$

$-k_1 + 2k_2 = 8$

Sistem persamaan seperti ini tidak konsisten, sehingga tidak ada skalar-skalar seperti itu. Maka ***w*** bukanlah kombinasi linier dari ***u*** dan ***v***.

Definisi : jika $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r$ adalah vektor-vektor didalam sebuah ruang vektor *v* dan jika tiap-tiap vektor didalam ***v*** dapat dinyatakan dengan kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r$ maka kita mengatakan bahwa vektor-vektor ini merentang *v*.

Contoh 17:

Vektor-vektor ***i*** =(1, 0, 0), ***j*** *=(0, 1, 0) dan* ***k*** = (0, 0, 1) merentang R^3 karena tiap-tiap vektor (a, b, c) di dalam R^3 dapat di tulis sebagai (a, b, c) = $a_i, + a_j, + c_k$

Yang merupakan kombinasi linier dari ***i***, ***j***, dan ***k***.

Contoh 18:

Polinomial-polinomial 1, x, $x^2, \ldots. x^n$ merentang ruang vektor p_n (lihat contoh 13) karena setiap polinomil p didalam p_n dapat ditulis sebagai

P = $a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_n x^n$

Yang merupakan kombinasi linier dari 1, x , x^2 ,........., x^n

Teori 5. Jika $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r$ adalah vektor-vektor di dalam sebuah ruang vektor ***v***, maka

(a) Himpunan ***w*** dari semua kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r$ adlah subruang dari ***v***.

(b) ***W*** adalah subruang terkecil dari *v* yang mengandung $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_r$ harus mengandung *w*.

Bukti : (a) jika *u* dan *v* adalah vektor – vektor di dalam***w***, maka

u = $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots\ldots + c_r v_r$

v = $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots\ldots + k_r v_r$

di mana $c_1, c_2, \ldots\ldots, c_r, k_1, k_2, \ldots\ldots, k_r$ adalah skalar maka **u** + ***v*** = $(c_1 + k_1)\ v_1$ + ($c_2 + k_2)\ v_2$ +........+$(c_r k_r)\ v_r$

dan untuk sembarang skalar ***k***

ku = (kc_1) v_1 + (kc_2) v_2 + ...+(k c_r) v_r

jadi ***u + v*** dan ku adlah kombinasi linier dari $v_1, v_2, \ldots, v_r$

maka ***u + v*** dan ku terletak di dalam ***w***.

Bukti : (b) vektor v_i adlah kombinasi llinier dari vektor – vektor $v_1, v_2, \ldots, v_r$

$$v_i = 0v_1 + 0v_2 + \ldots\ldots + 1v_1 + \ldots + 0v_r$$

Karena itu ubruang ***w*** berisi setiap vektor $v_1, v_2, \ldots\ldots v_r$.

Misal w^1 adalah sembarang subruang lain yang mengandung $v_1, v_2, \ldots\ldots v_r$

Karena w^1 tertutup di bawah penambahan dan perkalian skalar, maka w^1 harus mengandung kombinasi linier

$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots\ldots + c_r v_r$ jika $v_1, v_2 \ldots\ldots v_r$

Jadi w^1 mengandung setiap vektor dari ***w***.

Soal:

1. Misalkan U himpunan semua matriks 2 x 2 yang berbentuk $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat a = 0, dan d = 0. Tunjukkan bahwa U merupakan sub ruang dari ruang matriks 2 x 2 pada operasi yang biasa di matriks 2 x 2.

   Jawab:

   a. Karena $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$ maka $U \neq \emptyset$

   b. Ambil a, b $\in U$, akan ditunjukkan bahwa **a + b** $\in U$, karena a $\in U$ maka dipenuhi

   a = $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dengan syarat $a_1 = 0$ dan $d_1 = 0$ dan oleh karena b $\in U$, maka dipenuhi

   b = $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ dengan syarat $a_2 = 0$ dan $d_2 = 0$ dengan demikian

   a + **b** = $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + d_1 \\ c_1 + c_2 & b_2 + d_2 \end{bmatrix}$ karena $a_1 = 0$ dan $a_2 = 0$ maka $a_1 + a_2 = 0$ dan juga karena $d_1 = 0$ dan d_2= 0 maka $d_1 + d_2 = 0$ jadi a + b $\in U$

   c. Ambil a $\in U$, *ambil k* $\in R$ dan akan ditunjukkan bahwa *ka* $\in U$. Karena a $\in U$ *maka* dipenuhi a = $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ dengan syarat $a_1 = 0$ dan $d_1 = 0$ maka *ka*= $\begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kc_1 & kd_1 \end{bmatrix}$, berarti $ka_1 = 0$ dan $kd_1 = 0$. Jadi *ka* $\in U$.

   Dengan demikian, U merupakan subruang dari ruang vektor matriks 2 x 2.

2. Misalkan U himpunan semua matriks 2 x 2 yang berbentuk matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan syarat ad = 0, Apakah U subruang dari ruang vektor matriks 2 x 2

   U bukan subruang dari matriks 2 x 2 oleh karena itu dibutuhkan contoh penyangkal.

   $m_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \in U$ dan $m_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \in U$, tetapi $m_1 + m_2 = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \notin U$.

   Jadi U bukan subruang dari matriks 2 x 2.

4.4 KEBEBASAN LINEAR

Definisi. Jika $S = \{v_{1,}\ v_{2,}\ \dots, v_r\}$ adalah himpunan tak kosong vektor-vektor, maka persamaan vektor

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r\ v_r = 0$$

Memiliki paling tidak satu solusi, yaitu

$$k_1 = 0,\ k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya solusi, maka *S* disebut sebagai himpunan *bebas linear (linearly independent)*.Jika ada solusi-solusi lain, maka *S* disebut himpunan *tak bebas linear (linearly dependent)*.

Contoh 1.

Jika vektor-vektor *S* = $\{v_1, v_2, v_3\}$, dimanav_1 = (2, -1, 0, 3), v_2 = (1, 2, 5, -1), v_3 = (7, -1, 5, 8) adalah himpunan tak bebas linear, karena $3v_1$ + v_2 - v_3 = 0.

Contoh 4.

Tentukan apakah vektor-vektor

$$v_1 = (1, -2, 3), v_2 = (5, 6, -1), v_3 = (3, 2, 1)$$

Membentuk suatu himpunan tidak bebas atau himpunan bebas linier.

Penyelesaian.

Persamaan vektor dalam bentuk komponen-komponennya.

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

Menjadi

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3\,(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

Atau secara ekuivalen,

$(\mathrm{k}_1 + 5\mathrm{k}_2 + 3\mathrm{k}_3, -2\mathrm{k}_1 + 6\mathrm{k}_2 + 2\mathrm{k}_3, 3\mathrm{k}_1 - \mathrm{k}_2 + \mathrm{k}_3)$ = (0, 0, 0)

Dengan menyertakan komponen-komponen yang bersesuaian akan diperoleh$k_1 + 5k_2 + 3k_3$ = 0

$$-2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0$$

$3k_1 - k_2 + k_3$ = 0

Jika $v_1, v_2, dan\ v_3$membentuk suatu himpunan tidak bebas linier jika sistem ini memiliki solusi nontrivial, atau suatu himpunan bebas linier jika hanya memiliki solusi trivial. Dengan menyelesaikan sistem ini kita memperoleh

$k_1 = -\frac{1}{2}t$, $k_2 = -\frac{1}{2}t$, $k_3 = t$

Jadi sistem ini memiliki solusi nontrivial dan $v_1, v_2, dan\ v_3$ membentuk suatu himpunan tidak bebas linier.

Teorema 6. Himpunan S dengan dua vektor atau lebih adalah

(a) Tak bebas linear jika dan hanya jika paling tidak satu di antara vektor S dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor S lainnya.

(b) Bebas linier jika dan hanya jika tidak ada vektor S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dalam vektor S lainnya.

Bukti. Kami akan membuktikan bagian (a) dan membiarkan bagian (b) sebagailatihanbagianda. (a) Misalkan S $=v_{1,} v_{2,} \ldots, v_r$ adalah sebuah himpunan dengan dua vektor atau lebih. Jika kita menganggap bahwa S tak bebas linear, makaskalar$k_1, k_2, \ldots, k_r$ tidak semuanya nol, dengan demikian

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots. + k_r\ v_r = 0$$

Untukkhasnya, anggaplahbahwa$k_1 \neq 0$. Maka (4.3) dapat kita tulis kembali sebagai

$$v_1 = \left(-\frac{k_2}{k_1}\right) v_2 + \ldots + \left(-\frac{k_r}{k_1}\right) v_r$$

Yang menyatakanv_1 sebagai kombinasi linear dari vektor lainnya pada S. Demikian juga, jika $k_j \neq 0$ dalam (4.3) untuk beberapa j = 2, 3, … , r, maka v_j dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor lainnya pada S.

Sebaliknya, marilah kita anggap bahwa tidak satu pun vektor S yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari vektor lainnya. Secara spesifik, anggaplah bahwa

$$v_1 = c_2 v_2 + c_3 v_3 + \cdots + c_r v_r$$

Sehingga

$$v_1 - c_2 v_2 - c_3 v_3 - \ldots - c_r v_r = 0$$

Berikutnya bahwa S adalah tak bebas linear karena persamaan

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + \ldots. + k_r\ v_r = 0$$

Terpenuhi dengan

$$k_1 = 1, k_2 = -c_2, \ldots, k_r = -c_r$$

Yang menyatakan bahwa vektor tersebut tidak semuanya nol. Buktidalamkasusini di mana beberapavektorlaindari v_1.

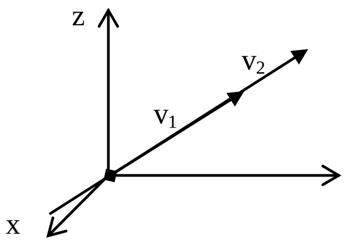
Teorema 7

(a) Jika sebuah himpunan mengandung vektor nol, maka himpunan itu tak bebas linear.

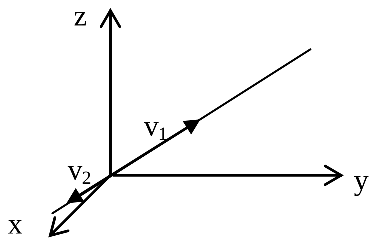
(b) Sebuah himpunan yang mempunyai persis dua vektor tak bebas linear jika dan hanya jika salah satu dari vektor itu adalahperkaliandariskalarlainnya.

Contoh 27

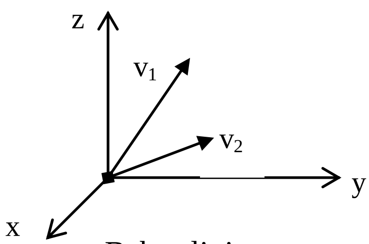
DalamR^2 atau R^3 satu vektor adalah kelipatan skalar dari vektor lainnya jika dan hanya jika kedua vektor yang terletak pada garis yang sama melalui titik asal ditempatkan pada titik awalnya melalui titik asal. Jadi, berikutnya dari bagian (b) dari Teorema 7 bahwa dalamR^2 atau R^3 dua vektor berbentuk himpunan tak bebas linear adalah jika dan hanya jika vektor itu terletak pada garis yang sama melalui titik asal yang ditempatkan pada titik awalnya melalui titik asal itu sendiri. (Gambar 4.6).



a. Tidak bebas linier



b. Tidak bebas linier



c. Bebas linier

Teorema 8.

Misalkan$S = \{v_{1,}\ v_{2,}\ \ldots, v_r\}$ adalah himpunan vektor-vektor pada R^n. Jika r > n, maka S tak bebas linear.

Bukti. Misalkan

$$v_1 = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n})$$

$$v_2 = (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n})$$

$$v_r = (v_{r1}, v_{r2}, \ldots, v_{rn})$$

Tinjaulahpersamaan

$$k_1\, v_1 + k_2\, v_2 + \ldots. + k_r\ v_r = 0$$

Jika, seperti yang dilukiskan dalam contoh 4, kita menyatakan kedua ruas dari persamaan ini dalam komponen-komponennya dan kemudian menyamakan komponen-komponen yang bersesuaian, kita dapatkan sistem

$$v_{11}k_1 + v_{21}k_2 + \cdots + v_{r1}k_r = 0$$

$$v_{12}k_1 + v_{22}k_2 + \cdots + v_{r2}k_r = 0$$

$$v_{1n}k_1 + v_{2n}k_2 + \cdots + v_{rn}k_r = 0$$

Inimerupakan system homogeny dari n persamaan pada r bilangan tak diketahui $k_1, \ldots, k_r$. Karena r > n, maka jelaslah dari teorema 1 bagian 1.3 bahwa sistem tersebut mempunyai pemecahan tak trivial. Maka $S = [v_1, v_2, \ldots, v_r]$ adalah himpunan tak bebas linear.

Contoh. Himpunan vektor manakah dari himpunan berikut yang bebas linier dalam R^3?

a. $(1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T$

b. $(1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T$

Penyelesaian:

a. Ketiga vektor bebas linier untuk membuktikan hal ini kita harus menunjukkan bahwa satu-satunya untuk

$c_1(1, 1, 1)^T + c_2(1, 1, 0)^T + c_3(1, 0, 0)^T = (0, 0, 0)^T$

Adalah jika semua saklar c_1, c_2, c_3 adalah nol.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 &= 0 \end{aligned}$$

satu-satunya penyelesaian untuk sistem ini adalah $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$

b. Jika

$c_1 (1, 0, 1)^T + c_2 (0, 1, 0)^T = (0, 0, 0)^T$

maka $(c_1, c_2, c_1)^T = (0, 0, 0)^T$

sehingga $c_1 = c_2 = 0$. Oleh karena itu kedua vektor adalah bebas linier.

4.5 BASIS DAN DIMENSI

Definisi. Jika *V* adalah sebarang ruang vektor dan $S = \{v_1, v_2, ..., v_r\}$ adalah sebuah himpunan berhingga dari vektor-vektor di dalam *V*, maka *S* dinamakan basis untuk *V* jika:

(i) *S* bebas linier

(ii) *S* merentang *V*

Misalkan $e_1 = (1,0,0,...,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0)$, $e_n = (0,0,0,...,1)$, maka $S = (e_1, e_2, ..., e_n)$ adalah sebuah himpunan yang bebas linier di dalam R^n. Karena setiap vektor $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ di dalam R^n dapat dituliskan sebagai $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + ... + v_n e_n$, maka *S* merentang R^n sehingga *S* adalah sebuah basis. Basis ini dinamakan *basis standar untuk* R^n.

Contoh:

Misalkan $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (2,9,0)$ dan $v_3 = (3,3,4)$. Tunjukkan bahwa himpunan $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ adalah suatu basis untuk R^3.

Penyelesaian:

Untuk menunjukkan bahwa himpunan *S* merentang R^3, maka harus ditunjukkan bahwa suatu vektor sebarang $b = (b_1, b_2, b_3)$ dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linier

$$b = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3$$

dari vektor-vektor pada *S*. Dengan menyatakan persamaan ini dalam bentuk komponen-komponennya maka diperoleh

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1,2,1) + k_2(2,9,0) + k_3(3,3,4)$$

atau

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + 2k_2 + 3k_3, 2k_1 + 9k_2 + 3k_3, k_1 + 4k_3)$$

atau, dengan menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = b_1$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = b_2$$

$$k_1 + 4k_3 = b_3 \qquad (1)$$

Jadi, untuk menunjukkan bahwa *S* merentang R^3, harus ditunjukkan bahwa sistem (1) memiliki satu solusi untuk setiap pilihan $b = (b_1, b_2, b_3)$.

Untuk membuktikan bahwa S bebas linier, maka harus ditunjukkan bahwa satu-satunya solusi dari

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0 \qquad (2)$$

adalah $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Sebagaimana di atas, jika (2) dinyatakan dalam bentuk komponen-komponennya, pembuktian kebebasan linier akan berkurang hanya dengan menunjukkan bahwa sistem homogen

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$$
$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = 0$$
$$k_1 + 4k_3 = 0 \qquad (3)$$

hanya memiliki solusi trivial. Sistem (1) dan (3) memiliki matriks koefisien yang sama. Jadi, dapat dibuktikan secara stimulan bahwa S adalah bebas linier dan merentang R^3dengan menunjukkan bahwa pada sistem (1) dan (3) matriks koefisiennya memiliki determinan tak nol. Dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \text{ diperoleh } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

dan dengan demikian S adalah basis untuk R^3.

Teorema 7. Jika $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *adalah sebuah basis untuk sebuah ruang vektor V, maka tiap-tiap himpunan dengan lebih daripada n vektor akan tak bebas linier.*

Teorema 8. Setiap dua basis untuk sebuah ruang vektor berdimensi berhingga mempunyai banyaknya vektor yang sama.

Definisi. Dimensi dari sebuah ruang vektor *V* yang berdimensi berhingga didefinisikan sebagai banyaknya vektor di dalam sebuah basis untuk *V*. Selain itu, kita mendefinisikan ruang vektor nol mempunyai dimensi nol.

Contoh:

Tentukan basis dan dimensi untuk ruang pemecahan dari sistem homogen

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad - x_5 = 0$$

$$x_3 + \ x_4 + x_5 = 0$$

Penyelesaian:

Pemecahan sistem tersebut diberikan oleh

$x_1 = -s - t$, $x_2 = s$, $x_3 = -t$, $x_4 = 0$, $x_5 = t$

Maka vektor-vektor pemecahan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yang menunjukkan bahwa vektor-vektor

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

merentang ruang pemecahan tersebut. Karena vektor-vektor tersebut juga bebas linier, maka $\{v_1, v_2\}$ adalah sebuah basis dan ruang pemecahan tersebut adalah ruang berdimensi dua.

Teorema 9.

a. *Jika* $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *adalah sebuah himpunan dari n vektor yang bebas linier di dalam sebuah ruang V yang berdimensi n, maka S adalah sebuah baris untuk V.*

b. *Jika* $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *adalah sebuah himpunan dari n vektor yang merentang sebuah ruang V yang berdiameter n, maka S adalah sebuah baris untuk V.*

c. *Jika* $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *adalah sebuah himpunan yang bebas linier di dalam sebuah ruang V yang berdimensi n dan r < n, maka S dapat diperbesar menjadi sebuah baris untuk V; yakni, ada vektor-vektor* $v_{r+1}, ..., v_n$ *sehingga* $\{v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ *adalah sebuah baris untuk V.*

Latihan Soal

1. Misalkan $v_1 = (2,1)$, $v_2 = (3,0)$, tunjukkan bahwa himpunan $S = \{v_1, v_2\}$ adalah suatu basis untuk R^2.

Jawab:

Untuk menunjukkan bahwa himpunan *S* merentang R^2, maka harus ditunjukkan bahwa suatu vektor sebarang $b=(b_1,b_2)$ dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linier

$$b = k_1v_1 + k_2v_2$$

dari vektor-vektor pada *S*. Dengan menyatakan persamaan ini dalam bentuk komponen-komponennya maka diperoleh

$$(b_1,b_2) = k_1(2,1) + k_2(3,0)$$

atau

$$(b_1,b_2) = (2k_1 + 3k_2, k_1)$$

atau, dengan menyetarakan komponen-komponen yang bersesuaian

$$\begin{aligned} 2k_1 + 3k_2 &= b_1 \\ k_1 &= b_2 \end{aligned} \qquad (1)$$

Jadi, untuk menunjukkan bahwa *S* merentang R^2, harus ditunjukkan bahwa sistem (1) memiliki satu solusi untuk setiap pilihan $b=(b_1,b_2)$.

Untuk membuktikan bahwa *S* bebas linier, maka harus ditunjukkan bahwa satu-satunya solusi dari

$$k_1v_1 + k_2v_2 = 0 \qquad (2)$$

adalah $k_1 = k_2 = 0$. Sebagaimana di atas, jika (2) dinyatakan dalam bentuk komponen-komponennya, pembuktian kebebasan linier akan berkurang hanya dengan menunjukkan bahwa sistem homogen

$$\begin{aligned} 2k_1 + 3k_2 &= 0 \\ k_1 &= 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

(3)

hanya memiliki solusi trivial. Sistem (1) dan (3) memiliki matriks koefisien yang sama. Jadi, dapat dibuktikan secara stimulan bahwa *S* adalah bebas linier dan merentang R^3dengan menunjukkan bahwa pada sistem (1) dan (3) matriks koefisiennya memiliki determinan tak nol. Dari

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, diperoleh $\det(A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -3$

dan dengan demikian *S* adalah basis untuk R^2.

2. Tentukan basis dan dimensi untuk ruang pemecahan dari sistem homogen

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$-2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$-x_1 \qquad + x_3 = 0$$

Jawab:

Matriksnya:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ B1x2+B2 \\ B1x1+B3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} B2x\text{-}1+B1 \\ \\ B2x\text{-}1+B3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pemecahan sistem tersebut diberikan oleh

$x_1 = s$, $x_2 = 0$, $x_3 = s$

Maka vektor-vektor pemecahan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yang menunjukkan bahwa vektor-vektor

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

merentang ruang pemecahan tersebut. Karena vektor-vektor tersebut juga bebas linier, maka $\{v_1\}$ adalah sebuah basis dan ruang pemecahan tersebut adalah ruang berdimensi satu.

BAB V

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

6.1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Eigen dalam bahasa jerman adalah “asli”, nilai karateristik (*characteristic value*) atau akar laten (*latent root*)

Definisi: Jika ***A****adalah* sebuah matrik *n* x *n*, maka sebuah vektor yang tak nol x di dalam Ruang n di namakan sebuah vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x yakni

$Ax = \lambda x$

Untuk skalar λ

- Skalar λ dinamakan nilai eigen (eigen value) dari *A*
- x sebuah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ

Jika λ adalah nilai eigen dari *A* yang bersesuaian dengan x, maka $Ax = \lambda x$, sehinga perkalian oleh *A* akan membesarkan x, mengkontraksi x, atau membalik arah x yang bergantung pada nilai λ

Untuk mencari nilai eigen dari sebuah matrik A yang berukuran n x n maka kita menuliskan kembali $Ax = \lambda Ix \Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0$

Supaya λ adalah nilai eigen, maka harus ada pemecehan tak nol

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0}$$

Ini dinamakan ***persamaan karakteristik*** dari *A*, skalar yang memenuhi ini adalah nilai eigen dari *A*. Bila di ekspansikan maka determinan (λI-*A*) adalah sebuah polinomial di dalam λ yang dinamakan ***polinomial karakteristik*** dari *A*.

Contoh soal:

Carilah nilai-nilai eigen dari matrik berikut:

1. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Pemecahan

1.

$$\lambda I - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -4 & \lambda+2 \end{pmatrix} = \lambda^2-\lambda-2$$

$$\operatorname{Det}(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -4 & \lambda+2 \end{pmatrix} = \lambda^2-\lambda-2$$

Persamaan karakteristik dari A adalah

$\lambda^2-\lambda-2=0$

Pemecahan persoalan ini adalah $\lambda=2$ dan $\lambda= -1$

2. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & -1 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 + 9\lambda - 4$$

- $\lambda^3 - \lambda^2 + 9\lambda - 4$ di bagi $(\lambda - 4)$
- $(\lambda - 4)(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$
- $(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$ memenuhi persamaan kuadrat
- nilai-nilai eigen dari *A* adalah λ=1

Vector Eigen

Definisi :

Jika *A* adalah sebuah matrik *n x n*, maka sebuah vector tak nol x di dalam dinamakan sebuah ***Vector Eigen (eigen vektor)***dari *A* jika *Ax* adalah kelipatan scalar dari *x* yaitu : $Ax = \lambda x$

Teorema I :

Jika A adalah matrik $n \times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain :

a. λ adalah nilai eigen dari A.

b. System persamaan $(\lambda l - A)\ x = 0$ mempunyai pemecahan yang tak trivial.

c. Sebuah vector tak nol x di dalam sehingga $Ax = \lambda x$.

d. λ adalah pemecahan riil dari persamaan karakteristik det $(\lambda l - A) = 0$.

Vector eigen dari A yang bersesuaian dengan nilai eigen λ adalah vector tak nol yang memenuhi $Ax = \lambda x$. secara ekuivalen maha vector eigen yang bersesuaian dengan λ Adalah vector tak nol di dalam ruang pemecahan dari $(\lambda l - A)\ x = 0$. Kita menanamkan ruang pemecahan sebagai ruang eigen (eigen space) dari A yang bersesuaian dengan λ.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Pemecahan :

Persamaan karakteristik dari A adalah $(\lambda - 1)\ (\lambda - 5) = 0$.buktikan sehingga nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dan $\lambda .= 5$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Adalah vector eigen dari A yang bersesuaian dengan λ jika dan hanya jika x adalah pemecahan tak trivial dari $(\lambda l - A)\ x = 0$ yaitu :

$$\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 5$, maka :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Menghasilkan :

x1 = -s   x2 = s   x3 = t

Jadi vector eigen dari *A* yang bersesuaian dengan λ = 5 adalah vector tak nol yang berbentuk :

$$x = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Karena :

Adalah vector yang bebas linear, maka vector tersebut akan membentuksebuah basis untuk ruang eigen yang bersesuaian dengan λ = 5.

Jika λ = 1, maka : $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Menghasilkan :

x1 =t   x2 = t   x3 = 0

Jadi vector eigen yang bersesuaian dengan λ = 1 adalah vector tak nol yang berbentuk :

$$x = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Adalah sebuah basis ruang eigen yang bersesuaian dengan λ = 1.

6. 2 DIAGONALISASI

Pada subbab ini kita meninjau masalah faktorisasi matriks *A* berorde *n x n* ke dalam suatu hasil kali berbentuk XDX^{-1}, di mana *D* adalah diagonal. Akan kita berikaan suatu syarat yang perlu dan cukup dan eksistensi faktorisasi yang demikian dan kita akan melihat sejumlah contoh. Kita mulai dengan memperlihatkan bahwa vektor-vektor eigen yang dimiliki oleh nilai-nilai eigen yang berbeda adalah bebas linier.

Teorema 2: *jika A adalah sebuah matriks n x n, maka pernyataan-pertanyaan yang berikut ekuivalen satu sama lain.*

a. *A dapat didiagonalisir*

b. *A mempunyai n vector eigen yang bebas linear*

Pembuktian:

$a \Rightarrow b$ karena a dianggap didiagonalisir maka ada sebuah matrik yang dapat dibalik

Sehingga $P^{-1}AP$ diagonal, katakanlah $P^{-1}AP = D$, dimana:

Maka AP=PD; yakni

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_1 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

Definisi: Suatu matriks *A* berorde *n x n* disebut dapat didiagnolisasi jika terdapat matriks *X* singular dan suatu matriks diagonal *D* sedemikian rupa sehingga.

X^{-1} AX = D

Kita katakan bahwa *X* mendiagonalisasi *A*

Catatan

1. Jika *A* dapat didiagonalisasi, maka vektor-vektor kolom dari matriks pendiagonal X (yang mendiagonalisasi *A*) adalah vektor-vektor eigen dari *A* dan elemen-elemen diagonal D adalah nilai-nilai eigen yang bersesuaian dengan *A*
2. Matriks pendiagonal X tidaklah tunggal. Dengan menyusun ulang urutan kolom dari matriks pendiagonal X, atau mengalikan dengan suatu skalar taknol, akan dihasilkan suatu matriks pendiagonal yang baru
3. Jika A adalah *n x n* dan *A* mempunyai n nilai eigen yang berbeda, maka *A* dapat didiagonalisasi. Jika nilai-nilai eigen tidak berbeda, maka *A* dapat atau tidak daapat didiagonalisasi, bergantung kepada apakah *A* mempunyai atau tidak mempunyai *n* vektor eigen bebas linear.
4. Jika A dapat didiagonalisasi, maka A dapat difaktorkan ke dalam hasil kali XDX^{-1}

Berdasarkan catatan 4 maka $A^2 = (XDX^{-1})\,(XDX^{-1}) = XD^2X^{-1}$ dan secara umum $A^k = XD^k\,X^{-1}$

$$\begin{bmatrix} (\lambda_1)^k & & \\ & (\lambda_2)^k & \\ & & (\lambda_n)^k \end{bmatrix} X^{-1}$$

Sekali kita mempunyai suatu faktorisasi $A = XDX^{-1}$, maka mudah untuk menghitung pangkat-pangkat dari A

Contoh :

Misalkan A = $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -4$. Sesuai dengan λ_1 dan λ_2 maka kita mempunyai vektor-vektor eigen $x_1 = (3, 1)^T$ dan $x_2 = (1, 2)^T$.

Misalkan

$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

maka selanjutnya X^{-1} AX = $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ dan XDX^{-1} =

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = A$$

Contoh:

MisalkanA = $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ Mudah dilihat bahwa nilai-nilai eigen dari A adalah

λ_1 = 0, $\lambda_2 = 1$, λ_3 = 1. Sesuai dengan λ_1 = 0, maka kita mempunyai vektor eigen $(1, 1, 1)^7$ dan sesuai dengan λ = 1 kita mempunyai vektor-vektor eigen $(1, 2, 0)^T$ dan $(0, -2, 1)^7$. Misalkan

X\= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

maka selanjutnya $XDX^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Meskipun λ = 1 adalah nilai eigen ganda, matriks tersebut masih dapat didiagonalisasi terdapat tiga vektor eigen bebas linear. Perlu dicatat juga bahwa :

$A^k = XD^k X^{-1} = XDX^{-1} = A$ untuk sembarang nilai k ≥ 1.

Jika *A* adalah matriks *n* x *n* yang mempunyai vektor eigen bebas linear yang lebih dari *n*, maka kita namakan *A* adalah detektif Teorema 6.3.2 maka suatu detektif tidak dapat didiagonalisasi.

Contoh:

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Kedua nilai eigen dari *A* adalah sama dengan I. Sembarang vektor eigen yang bersesuaian dengan λ = 1 haruslah suatu kelipatan dari $x_1 = (1, 0)^T$. Jadi, *A* adalah detektif dan tidak dapat didiagonalisasi.

6.3. Diagonalisasi Ortogonal, Matriks Simetris

Definisi : sebuah matrik A yang kuadrat dinamakan dapat didiagonalisasi secara orthogonal jika ada sebuah matrik P yang orthogonal sehingga $P^{-1}AP$ (= P^tAP) diagonal matrik P dikatakan mendiagonalisasi.

Teorema 5: *jika A adalah sebuah matrik n x n, maka pernyataan yang berikut ekuivalen satu sama lain:*

a. A dapat didiagonalisasi secara orthogonal
b. A memilki sebuah himpunan orthogonal dari n vektor eigen

Pembuktian:

$a \Rightarrow b$ karena *A* dapat didiagonalisasi secara orthogonal maka ada sebuah matrik *P* yang orthogonal, sehingga $P^{-1}AP$ diagonal. Sebagaimana bukti teorema 2, maka ke *n* vector kolom dari *P* adalh vector-vektor eigen dari *A*. karena *P* orthogonal, maka vector-vektor kolom ini ortonormal, sehingga *A* mempunyai *n* vector eigen yang ortonormal.

$b \Rightarrow a$ anggaplah bahwa *A* mempunyai sebuah himpunan ortonormal dari *n* vector eigen [$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$]. seperti halnya bukti teorema 2, maka matriks *P* dengan vector-vektor eigen ini sebagai kolom-kolom akan mendiagonalisasi *A*. karena vector-vektor eigen ini ortonormal, maka *P* orthogonal sehingga akan mendiagonalisasi *A* secara orthogonal.

Matrik *A* yang berukuran *n* x *n* yang dapat didiagonalisasi secara orthogonal akan didiagonalisasi secara orthogonal oleh sebuah matrik *P* yang berukuran *n* x *n* yang kolom-kolomnya membentuk sebuah himpunan ortonormal dari vector-vektor eigen dari *A*. Misalkan *D* adalah matrik diagonal $D = P^{-1}AP$

Jadi $A = PDP^{-1}$

Atau karena orthogonal maka $A = PDP^t$

Maka $A^t = (PDP^t)^t = PD^tP^t = PDP^t = A$

Sehingga $A^t = A$ dikatakan simetris .

Teorema 6: *Jika A adalah sebuah matriks n x n, maka pernyataan-pernyataan yang berikut ekuivalen satu sama lain:*

a. A dapat didiagonalisasi secara orthogonal

b. *A simetris*

Contoh matriks simetris:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Teorema 7 : *Jika A adalah sebuah matriks simetris, maka vektor-vektor eigen dari ruang-ruang eigen yang berbeda akan orthogonal.*

Diagonalisasi Matriks Simetrik sebagai konsekuensi dari teorema ini maka kita mendapat prosedur yang berikut untuk mendiagonalisasi sebuah mariks simetris secara orthogonal.

Langkah 1. Carilah sebuah basis untuk setiap ruang eigen dari A.

Langkah 2. Pakailah proses Garm-Schmidt kepada setiap basis ini untuk mendapatkan sebuah basis orthogonal untuk setiap ruang eigen.

Langkah 3. Bentuklah matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis yang dibangun di dalam langkah 2; matriks ini akan mendiagonalisasi A secara orthogonal.

Bukti :

Misalakan λ1 dan λ2 adalah dua nilai eigen yang berbeda dari metriks A yang simetris yang berukuran nxn, dan dimisalkan

$$v_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Adalah vektor-vektor eigen yang bersangkutan . kita ingin membuktikan bahwa

$\langle v_1, v_2 \rangle = v_1 v'_1 + v_2 v'_2 + ... + v_n v'_n = 0$

Karena $v_1{}^t v_2$ adalah sebuah matriks 1x1 yang mempunyai $\langle v_1, v_2 \rangle$ sebagai satu-satunya entrinya, maka kita dapat melengkapi bukti tersebut dengan memperlihatkan bahwa $v_1{}^t v_2$ =0.

Karena $v_1{}^t A v_2$ adalah sebuah matriks 1x1 dan tiap-tiap matriks 1x1 sudah jelas simetris maka

$v_1{}^t A v_2 = (v_1{}^t A v_2)^t$ (karena sifat transposisi; lihat bagian 2.3)

$= v_2{}^t A^t v_1$ (karena A simetris)

$= v_2{}^t A v_1$

Juga $v_1{}^t A v_2 = v_1{}^t \lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_1{}^t v_2$

Dan

$v_2{}^t A v_1 = v_2{}^t \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_2{}^t v_1$

$= \lambda_1 \left(v_2{}^t v_1 \right)^t = \lambda_1 v_1{}^t v_2$

Jadi $\lambda_1 v_1{}^t v_2 = \lambda_2 v_1{}^t v_2$

Atau $(\lambda_1 - \lambda_2) v_1{}^t v_2 = 0$

Karena $\lambda_1 \neq \lambda_2$, maka diperoleh $v_1{}^t v_2 = 0$

Contoh :

Matrik Orthogonal P yang Mendiagonalisasi Matriks A

Tentukan sebuah matriks orthogonal P yang mendiagonalisasi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Persamaan karakteristik untuk A adalah

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda-4 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-4 \end{bmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-8) = 0$$

sehingga, nilai-nilai eigen dari A adalah λ=2 dan λ=8. Melelui metode yang digunakan pada contoh 5 subbab 7.1., dapat ditunjukkan bahwa

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Membentuk sebuah basis untuk ruang eigen yang terkait dengan λ=2. Dengan menerapkan proses Gram-Schmith pada $\{u_1, u_2\}$akan menghasilkan vektor-vektor eigen otonormal berikut ini(buktikan):

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Ruang eigen yang terkait dengan λ=8 memiliki

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sebagai basis. Dengan menerapkan proses Gram-Schmidt pada $\{u_3\}$ akan menghasilkan

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Akhirnya, dengan menggunakan $v_1, v_2, dan v_3$ sebagai vektor-vektor kolom kita memperoleh

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Yang mendiagonalisasi A secara orthogonal. (untuk memeriksa kebenaran jawaban ini, anda dapat membuktikan bahwa $P^T AP$ adalah sebuah matriks diagonal.)

Teorema 8 :

a) *Persamaan karakteristik sebuah matriks A yang simetris hanya mempunyai akar-akar riel.*
b) *Jika sebuah nilai eigen λ dari sebuah matrik A yang simetris diulangi k kali sebagai sebuah akar dari persamaan karakteristik tersebut, maka ruang eigen yang bersesuaian dengan λ adalah ruang berdimensi k.*

Contoh :

Persamaan karakteristik dari matriks simetris

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Adalah $(\lambda - 4)^2 (\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) = 0$

Sehingga nilai-nilai eigen adalah λ=4, λ=1, dan λ=2, dimana λ=4 dan λ=1 diulangi dua kali dan λ=2 terjadi sekali.jadi ruang-ruag eigen yang bersesuaian dengan λ=4 dan λ=2 adalah ruang berdimensi 2 dan ruang eigen yang bersesuaian dengan λ=1 adalah ruan berdimensi 1.