DIKTAT
ALJABAR LINIER

Oleh:
Anita T. Kurniawati, MSi

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI ADHI TAMA SURABAYA
(ITATS)

KATA PENGANTAR

Diktat ini berisi sistem persamaan linier (SPL), Determinan, invers, matriks, vektor, ruang vektor, nilai eigen dan vektor eigen serta transformasi linier. Materi ini sebagai dasar dari mata kuliah semester atas seperti Grafika komputer dan pengolahan sistem digital khusus untuk mahasiswa jurusan Teknik Informatika. Diktat ini dibuat agar mempermudah mahasiswa untuk mempelajari mata kuliah Aljabar Linier dengan materi yang disesuaikan dengan kurikulum di jurusan Teknik Informatika ITATS.

Supaya dapat memahami isi yang terkandung dalam diktat ini diharapkan mahasiswa harus menguasai teorinya dulu. Penulis menyadari bahwa isi dari diktat ini tidak luput dari berbagai kekurangan, karena itu kritik dan saran yang membangun dari pembaca sangat diharapkan untuk penyempurnaan pada penerbitan yang akan datang.

Kepada siapa saja yang telah membantu sehingga memungkinkan terbitnya diktat ini, penulis mengucapkan banyak terima kasih.

Semoga diktat ini bermanfaat bagi pemakai.

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

Sistem Persamaan Linier

Kajian sistem persamaan linier dan penyelesaiannya adalah merupakan salah satu hal yang penting dalam penerapan ilmu teknik. Pada bagian ini akan diperkenalkan beberapa terminologi dasar dan suatu metode untuk menyelesaikan sistem-sistem tersebut.

1.1. DEFINISI SISTEM PERSAMAAN LINIER

❖ **Persamaan Linier**

Misalkan sebuah garis dalam sebuah bidang xy ditulis secara aljabar seperti dibawah ini :

$$ax + by = c$$

maka persamaan diatas disebut persamaan linier dalam peubah x dan y. Dengan demikian persamaan linier secara umum dapat ditulis seperti :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots\dots\dots + a_nx_n = b$$

Contoh persamaan linier

$x + 3y = 7$ $\qquad$ $4x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 6$

$y = \frac{1}{2}x + 3z + 4$ $\qquad$ $x_1 + x_2 + \dots\dots\dots + x_n = 3$

Persamaan linier tidak memuat hasil kali, akar, atau fungsi-fungsi trigonometri, logaritma maupun eksponensial

Contoh yang bukan persamaan linier

$x + 4y^2 = 0$ $\quad\quad$ $3x + 2y – xy = 9$

$y – \sin x = 0$ $\quad\quad$ $\sqrt{x} + 2y = 2$

Penyelesaian dari sebuah persamaan linier adalah sederet n angka $s_1, s_2, \ldots\ldots s_n$ sedemikian sehingga angka tersebut memenuhi persamaan linier tersebut.

Contoh

Cari himpunan penyelesaian dari

a. $3x - 6y = 2$
   Penyelesaian:
   Tentukan nilai sebarang x atau sebarang y. misal diambil sebarang nilai x=t maka 3t - 6y = 2. Dari persamaan tersebut didapat $y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}$.
   Jadi himpunan penyelesaiannya x = t dan $y = \frac{1}{2}t - \frac{1}{3}$. Dengan memberi nilai t sebarang nilai, misal t = 2, maka x =2 dan $y = \frac{2}{3}$
b. $x - 3y + 5z = 8$
   penyelesaian:
   tentukan nilai sebarang dari dua variable/peubah, misal s untuk y dan u untuk z maka akan didapatkan himpunnan penyelesaian :
   $x = 3s – 5u + 8$, $y = s$ dan $z = u$.

- **Sistem Persamaan Linier**

Sistem persamaan linier adalah himpunan terhingga dari persamaan linier dalam peubah-peubah $x_1, x_2, x_3\ldots..,x_n$. Sedangkan deretan $s_1, s_2, \ldots\ldots s_n$ disebut suatu penyelesaian sistem jika $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, …..,$x_n = s_n$ merupakan penyelesaian dari setiap persamaan dalam sistem tersebut.

Contoh

$4x – y + 3z = -1$

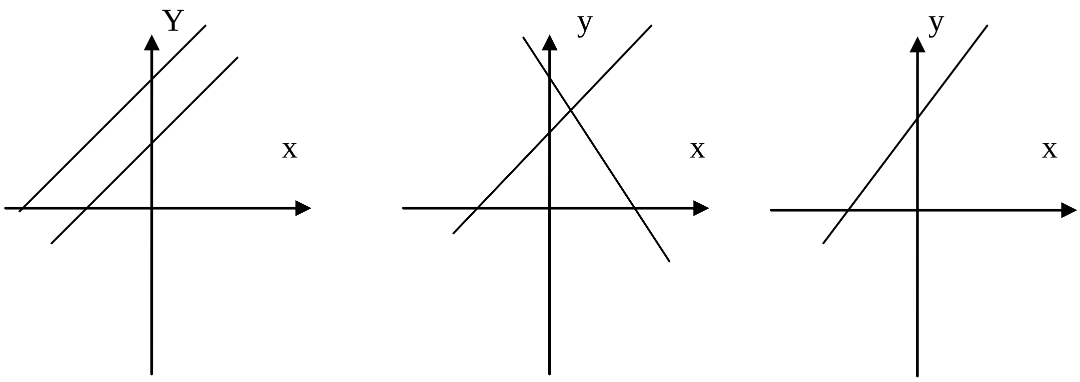
$3x + y + 9z = -4$

Sistem diatas mempunyai penyelesaian x = 1 , y = 2, z = -1. Dimana apabila nilai-ilai tersebut disubstitusikan kedalam kedua persamaan, maka akan terpenuhi.

Setiap sistem persamaan linier mungkin *tidak mempunyai penyelesaian*, *mempunyai satu penyelesaian, atau mempunyai tak-hingga banyaknya penyelesaian*. Sebuah sistem persamaan yang tidak mempunyai penyelesaian disebut sebagai ***tak-konsisten***, jika paling tidak ada satu penyelesaian, maka sistem tersebut disebut ***konsisten***.

Secara ilustrasi, karena persamaan linier grafiknya berbentuk garis, maka penyelesaian suatu sistem persamaan linier dapat dilihat dari perpaduan garis–garis nya.

a. Sistem persamaan linier yang tidak mempunyai penyelesaian, maka garis-garisnya akan saling sejajar.
b. Sistem persamaan linier yang mempunyai satu penyelesaian, maka garisnya akan saling memotong pada satu titik.
c. Sistem persamaan linier yang mempunyai banyak penyelesaian, maka garisnya akan saling berimpitan.



a. Tidak mempunyai penyelesaian   b. Satu penyelesaian   c. Banyak penyelesaian

Sebuah sistem persamaan linier dengan m persamaan linier dan n peubah dapat ditulis sebagai :

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\;\;\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

serta disingkat dengan hanya menuliskan susunan angka dalam bentuk segiempat yang disebut ***matriks yang diperbanyak***.

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\
 & & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}
$$

Matriks diperbanyak tersebut mempunyai elemen-elemen yang terdiri dari koefisien peubah dan nilai hasil persamaan.

Contoh :

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 11$

$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 9$

$6x_1 + 4x_2 - x_3 = 3$

Sistem persamaan linier diatas dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 11 \\ 3 & -2 & 5 & 9 \\ 6 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2. PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINIER

Metode dasar untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier adalah dengan mengganti sistem yang ada dengan suatu sistem yang baru yang mempunyai penyelesaian yang lebih mudah. Untuk mendapatkan sistem yang baru dapat dilakukan dengan menerapkan ***operasi baris elementer***.

Operasi baris elementer meliputi tiga langkah, yaitu

a. Kalikan sebuah baris dengan sebuah konstanta (dinotasikan cB_i dimana c = konstanta).
b. Pertukarkan dua baris (dinotasikan $B_i \Leftrightarrow B_j$ atau B_{ij}).
c. Tambahkan perkalian dari suatu baris ke baris lainnya (dinotasikan B_i+cB_j) .

Dengan operasi baris elementer diatas, matriks yang sudah dibentuk bisa direduksi menjadi sebuah matriks yang berbentuk ***baris-eselon***. Bentuk baris-eselon tersebut mempunyai sifat-sifat yang harus dipenuhi, yaitu :

a. Jika baris tidak seluruhnya nol, maka angka tak nol pertama dalam baris tersebut adalah sebuah angka 1. (atau utama 1)
b. Jika ada sebarang baris yang seluruhnya nol, maka baris dikelompokkan bersama dibagian bawah matriks
c. Jika sebarang dua matriks yang berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari angka nol, utama 1 dalam baris yang lebih bawah terletak disebelah kanan utama 1 dalam baris yang diatasnya
d. Masing-masing kolom yang berisi sebuah utama 1 mempunyai nol ditempat lainnya.

Suatu matriks yang memenuhi keempat sifat diatas dinamakan bentuk ***baris-eselon tereduksi***, sedangkan apabilah hanya memenuhi sifat a,b dan c dinamakan ***bentuk baris-eselon.***

Contoh:

- Matriks dalam ***bentuk baris-eselon tereduksi***

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriks dalam ***bentuk baris-eselon***

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prosedur untuk mereduksi suatu matriks yang diperbanyak menjadi ***bentuk baris-eselon*** dinamakan ***eliminasi gaussian***, sedangkan jika matriksnya menjadi ***bentuk baris-eselon tereduksi*** dinamakan ***eliminasi gauss-jordan***.

- **Eliminasi Gauss-jordan**

Prosedur eliminasi gauss-jourdan adalah sebuah prosedur untuk mereduksi matriks yang diperbanyak menjadi bentuk baris-eselon tereduksi.

Contoh

Selesaikan sistem persamaan berikut ini dengan eliminasi gauss-jordan

$$\begin{aligned} -\ x_2 + \qquad\qquad 7x_5 &= 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 &= 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Penyelesaian

Matriks yang diperbanyak dari sistem diatas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

dengan menggunakan operasi baris elementer , matriks ini direduksi menjadi matriks baris eselon tereduksi.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B1 \Leftrightarrow B2} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{B3-2B1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{2}\right)B2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \xrightarrow{B3-5B2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2B3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B2+\frac{7}{2}B3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B1-6B3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{B1+5B2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks terakhir berbentuk matriks baris eselon tereduksi. Dengan demikian persamaan yang sepadan adalah

$x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 7 - 2x_2 - 3x_4$
$x_3 = 1$
$x_5 = 2$

misalkan $x_2 = s$ dan $x_4 = t$ maka $x_1 = 7 - 2s - 3t$
Jadi himpunan penyelesaian umumnya

$$x_1 = 7 - 2s - 3t,\ x_2 = s,\ x_3 = 1,\ x_4 = t\ ,\ x_5 = 2$$

❖ **Eliminasi Gaussian**

Prosedur eliminasi gaussian adalah sebuah prosedur untuk mereduksi matriks yang diperbanyak menjadi bentuk baris-eselon. Sistem persamaan yang sudah dalam bentuk baris-eselon tersebut, bisa diselesaikan dengan teknik yang disebut subsitusi-balik.

Contoh:

Selesaikan sistem persamaan berikut dengan menggunakan eliminasi gaussian

$$x + y + 2z = 9$$

$$2x + 4y - 3z = 1$$

$$3x + 6y - 5z = 0$$

Penyelesaian

Matriks yang diperbanyak dari sistem diatas adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

Dengan operasi baris elementer, matriks tersebut diubah menjadi bentuk baris-eselon.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[B3-3B1]{B2-2B1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow{B3-3B2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}B2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{(bentuk baris eselon)}$$

Setelah matriks sudah dalam bentuk baris eselon maka dilakukan substitusi terbalik

$x + y + 2z = 9 \quad \Rightarrow x = 9 - y - 2z \quad \Rightarrow x = 1$

$y - \frac{7}{2}z = -\frac{17}{2} \quad \Rightarrow y = \frac{7}{2}z - \frac{17}{2} \quad \Rightarrow y = 2$

$z = 3$

Jadi himpunan penyelesaian : x = 1 , y = 2 , z = 3

1.3. SISTEM PERSAMAAN LINIER HOMOGEN

Sistem persamaan linier yang mempunyai semua konstantanya nol disebut ***sistem homogen.*** Sistem persamaan linier homogen mempunyai sifat konsisten, karena semua sistem seperti ini mempunyai penyelesaian $x_1=0, x_2=0, \ldots x_n=0$. Jika sistem hanya mempunyai penyelesaian seperti diatas , maka penyelesaiannya disebut ***penyelesaian trivial***. Sebaliknya jika ada penyelesaian lainnya, maka penyelesaiannya dinamakan ***penyelesaian tak-trivial***.

Contoh :

$a_1x + b_1y = 0$

$a_2x + b_2y = 0$

Teorema

” Sebuah sistem persamaan linier homogen yang mempunyai peubah lebih banyak dari jumlah persamaan mempunyai tak hingga banyaknya penyelesaian”

Contoh

Selesaikan SPL homogen berikut ini:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 - x_3 \quad\quad + x_5 &= 0\\
-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0\\
x_1 + x_2 - 2x_3 \quad\quad - x_5 &= 0\\
x_3 + x_4 + x_5 &= 0
\end{aligned}
$$

Penyelesaian

Matriks yang diperbanyak untuk sistem diatas

$$
\begin{pmatrix}
2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\
-1 & -1 & 0 & -3 & 1 & 0\\
0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
$$

Dengan mereduksi matriks menjadi matriks baris eselon tereduksi, didapatkan:

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Sistem yang sepadan adalah

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 \quad + x_5 &= 0\\
x_3 \quad + x_5 &= 0\\
x_4 \quad &= 0
\end{aligned}
$$

sehingga didapatkan

$x_1 = -x_2 - x_5$; $x_3 = -x_5$; $x_4 = 0$

Jadi penyelesaian umumnya:

$x_1 = -s - t$, $x_2 = s$, $x_3 = -t$, $x_4 = 0$, $x_5 = t$.

SOAL-SOAL LATIHAN 1

1. Cari himpunan penyelesaian dari masing-masing persamaan linier berikut ini :
   a. $7x - 5y = 3$
   b. $3x - 5y + 4z = 7$
   c. $-8x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 6x_4 = 1$

2. Selesaikan Sistem Persamaan Linear (SPL) berikut dengan menggunakan metode eliminasi gauss- Jordan :

a). $\left.\begin{array}{r} 2x-5y+2z=7 \\ x+2y-4z=3 \\ 3x-4y-6z=5 \end{array}\right\}$; b). $\left.\begin{array}{r} 2x+3y+z=11 \\ x+y+z=6 \\ -2x+y+z=3 \end{array}\right\}$ c). $\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x+2y+3z=14 \\ x+4y+9z=36 \end{array}\right\}$

3. Selesaikan SPL berikut dengan menggunakan metode eliminasi Gaussian dan substitusi terbalik :

a). $\left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=4 \\ 2x-y+2z=10 \\ x-3y-4z=5 \end{array}\right\}$ b). $\left.\begin{array}{r} 2x+y=7 \\ -y+3z=0 \\ x+z=3 \end{array}\right\}$ c). $\left.\begin{array}{r} 4x+9y=8 \\ 8x+6z=-1 \\ 6y+6z=-1 \end{array}\right\}$

4. Selesaikan masing-masing sistem berikut dengan metode eliminasi gauss-jordan dan eliminasi gaussian

a. $\begin{array}{r} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_2 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10 \end{array}$ b. $\begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{array}$

5. Selesaikan masing-masing sistem dengan menggunakan eliminasi gauss-jordan

a. $\begin{array}{l} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{array}$ b. $\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{array}$

6. Selesaikan sistem persamaan linier homogen menggunakan eliminasi gauss-jordan

a. $\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \end{array}$ b. $\begin{array}{r} x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array}$

1.4. MATRIKS , JENIS-JENIS MATRIKS DAN OPERASI MATRIKS

❖ Definisi Matriks

Matriks adalah susunan berbentuk persegipanjang dari elemen-elemen bilangan yang diatur berdasar baris dan kolom. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks tersebut.

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ adalah matriks berukuran / berdimensi *m*x*n.*

Ukuran sebuah matriks diberikan oleh jumlah baris dan kolom yang dikandungnya. *m* adalah banyak baris dari matriks A, *n* adalah kolom dari matriks A. Sehingga matriks diatas dapat ditulis sebagai :

$$A_{mxn} = \left(a_{ij}\right)_{mxn} .$$

Anggota pada baris ke-i dan kolom ke-j dari sebuah matriks A pada umumnya juga dapat dinyatakan sebagai $(A)_{ij}$ atau a_{ij} .

Contoh:

A_{1xn} (matriks baris, vektor baris). $A_{1x4} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

B_{nx1} (matriks kolom, vektor kolom). $B_{3x1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

❖ **Jenis-jenis Matriks**

1. **Matriks Diagonal**

   Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar dengan $a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$.

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

2. **Matriks Skalar**

   Matriks skalar adalah matriks diagonal dengan $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$.

   Contoh: $A_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. **Matriks Satuan (Matriks identitas)**

   Matriks identitas adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal utama sama dengan satu.

Contoh: $I_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Matriks Segitiga

Matriks segitiga atas adalah matriks bujur sangkar dengan $a_{ij} = 0$ untuk $i > j$.

Matriks segitiga bawah adalah matriks bujur sangkar dengan $a_{ij} = 0$ untuk $i < j$.

$$A_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B_{3x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Matriks segitiga atas — Matriks segitiga bawah

❖ **Operasi-operasi Matriks**

1. Dua Matriks Sama

Dua matriks dikatakan sama jika keduanya mempunyai ukuran sama dan elemen-elemen anggotanya yang seletak sama. Dalam notasi matriks, jika A=[a_{ij}] dan B=[b_{ij}] mempunya ukuran sama maka A=B jika dan hanya jika $a_{ij} = b_{ij}$.

Contoh: $A_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}, B_{3x3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B$.

2. Jumlah / Selisih Dua Matriks

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang mempunyai ukuran sama, maka ***jumlah*** A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota B dengan anggota-anggota A yang sepadan, dan ***selisih*** A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota A dengan anggota-anggota B yang sepadan. Matriks-matriks yang berukuran berbeda tidak bisa ditambahkan atau dikurangkan **.**

a. $A_{m\,x\,n} + B_{m\,x\,n} = C_{m\,x\,n}$.

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

b. $A_{m\,x\,n} - B_{m\,x\,n} = D_{m\,x\,n}$.

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Hasil kali Matriks dengan Skalar

Jika A adalah sebarang matriks dan k adalah sebarang skalar, maka hasil kali kA adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota A dengan k.

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Hasil kali Dua Matriks

Jika A adalah sebuah matriks m x p dan B adalah matriks p x n, maka hasil kali AB adalah matriks berukuran m x n yang anggota-anggotanya didefinisikan sebagai berikiut:

Untuk mencari anggota dalam baris ke-I dan kolom ke-j dari AB, pilih baris ke-I dari matrik A dan kolom ke-j dari matriks B. Kalikan anggota-anggota yang sepadan dari baris dan kolom secara bersama-sama dan jumlahkan hasilnya.

Syarat untuk bisa menggandakan dua matriks adalah ***jumlah kolom matriks pertama*** harus sama dengan ***jumlah baris matriks kedua***.

$$A_{m\,x\,p} \,.\, B_{p\,x\,n} = C_{m\,x\,n}$$

Contoh:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(2)+(-1)(1)+(2)(3) & (1)(0)+(-1)(-2)+(2)(1) \\ (-2)(2)+(2)(1)+(3)(3) & (-2)(0)+(2)(-2)+(3)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Pada umumnya: $AB \neq BA$.

5. Transpose Matriks

A^T (matriks transpose dari matriks A) : baris-baris dari matriks A dijadikan kolom-kolom dan kolom-kolom dijadikan baris-baris.

$$A_{m\,x\,n} = \left(a_{ij}\right)_{m\,x\,n} \Rightarrow A^T_{n\,x\,m} = \left(a_{ji}\right)_{n\,x\,m} .$$

Sifat-sifat transpose :

a. $((A)^T)^T = A$

b. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

c. $(kA)^T = kA^T$, dengan k adalah sebarang skalar

d. $(AB)^T = B^T A^T$

Contoh:

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T_{3x2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

❖ **Sifat-sifat operasi matriks**

Dengan asumsi bahwa ukuran-ukuran matriks dibawah ini adalah sedemikian sehingga operasi-operasi matrik dapat dilakukan, maka aturan-aturan yang berlaku pada operasi matriks adalah sebagai berikut:

a. A + B = B + A

b. A + (B + C) = (A + B) + C

c. A(BC) = (AB)C

d. A(B + C) = AB + AC

e. (B + C)A = BA + CA

f. A(B - C) = AB - AC

g. (B - C)A = BA – CA

h. a(B ± C) = aB ± aC

i. (a ± b)C = aC ±bC

j. a(bC) = (ab)C

k. a(BC) = (aB)C = B(aC)

❖ **Invers Matriks**

Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika matriks yang berukuran sama bisa didapatkanr (A_{nxn}, B_{nxn}) sedemikian hingga $\boxed{A_{nxn}.B_{nn} = I_n}$ maka

$$B_{nxn} = A^{-1}_{nxn}; \quad A.A^{-1} = I .$$

Maka A disebut bisa dibalik dan B disebut invers dari A

Syarat suatu matriks A_{nxn} mempunyai invers A^{-1}_{nxn} jika $|A| \neq 0$.

Sifat-sifat invers :

a. JIka B dan C keduanya adalah invers matriks A, maka B = C.

b. Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dan berukuran sama, maka

   i. AB dapat dibalik

   ii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Ada beberapa cara untuk mendapatkan invers dari suatu matriks:

a. $A.A^{-1} = I$ **.**

Contoh:

Dapatkan A^{-1} dari $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (2)(5) - (3)(3) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ mempunyai invers.

Misal: $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A.A^{-1} = I$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a+5c & 3b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+3c=1 \\ 3a+5c=0 \end{cases} \Rightarrow a=5, c=-3 \qquad \begin{cases} 2b+3d=0 \\ 3b+5d=1 \end{cases} \Rightarrow b=-3, d=2$$

Jadi: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

b. Operasi Baris Elementer (OBE)

Suatu matriks n x n disebut matriks dasar(elementer) jika matriks ini bisa diperoleh dari matriks identitas n x n, I_m dengan melakukan suatu operasi baris elementer.

Jika operasi baris elementer diterapkan pada suatu matriks identitas I untuk menghasilkan suatu matriks dasar E, maka ada operasi baris elemnter kedua yang jika diterapkan pada E, menghasilkan I lagi. Misalnya, jika E diperoleh dengan mengalikan baris ke-i dengan konstanta tak-nol c, maka I bisa didapatkan kembali jika baris ke-i dari E dikalikan dengan 1/c .

Untuk mendapatkan invers matriks yang dapat dibalik A, kita harus menemukan serangkaian operasi baris elementer yang mereduksi A menjadi matriks identitas dan kemudian melakukan rangkaian operasi yang sama pada I untuk memperoleh A^{-1}.

Untuk itu, kita bisa memposisikan matriks seperti berikut :

$$\left(A_{3x3} \mid I_3\right) \overset{OBE}{\sim} \left(\quad \mid \quad \right) \overset{OBE}{\sim} \left(I_3 \mid A^{-1}\right) \quad (\textit{OBE : Operasi Baris Elementer})$$

Contoh:

Dapatkan invers dari $A_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Penyelesaian:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{B_3-3B_1}{\overset{B_2-2B_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{B_3-B_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{B_2-6B_3}{\overset{B_1+B_3}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{B_1-2B_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -15 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right);$$

Jadi: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -15 & 13 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c. $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} adj\,(A)$.

<u>Contoh:</u>

Dapatkan A^{-1} dari $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Penyelesaian:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (3)(5) - (7)(2) = 1 .$$

$$\text{Kofaktor (A)} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\,(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\,(A) = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

- **Penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan Invers Matriks**

Jika A adalah suatu matriks n x n yang mempunyai invers, maka untuk setiap matriks b, nx 1, sistem persamaan ***Ax = b*** tepat mempunyai satu penyelesaian yaitu

$$\boldsymbol{x = A^{-1}b}.$$

Contoh

Selesaikan sistem persamaan linier berikut dengan invers matriks

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 5 \\ 2x + 5y + 3z &= 3 \\ x \qquad + 8z &= 17 \end{aligned}$$

Dalam bentuk Matriks, sistem ini bisa ditulis sebagai Ax = b, dengan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Dengan metode sebarang, didapatkan invers A^{-1} , yaitu

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -13 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$, maka penyelesaian system tersebut adalah

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -13 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ atau x = 1 , y = -1, z = 2 .

SOAL-SOAL LATIHAN 2

1. Diketahui: $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; a = 4 , b = -3

   ditanyakan: a). PQ b). $P + Q$ c). QP d). $P - Q$ e). aP f). b(Q+P)

2. Diketahui: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; ditanyakan: a). AB b). BA

3. Ditanyakan A^{-1} , jika: a). $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b). $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c). $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. Dapatkan B^{-1} dari: a). $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ b). $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Dapatkan invers dari matriks A berikut:

   a. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{pmatrix}$

6. Selesaikan sistem berikut dengan menggunakan invers matriks:

   a. x + y = 2
   5x + 6y = 9

   b. 4x – 3y = -3
   2x – 5y = 9

   c. x + 3y + z = 4
   2x + 2y + z = -1
   2x + 3y + z = 3

   d. 5x + 3y + 2z = 4
   3x + 3y + 2z = 2
   y + z = 5

   e. - y – 2z – 3w = 0
   x + y + 4z + 4w = 7
   x + 3y + 7z + 9w = 4
   -x – 2y - 4z – 6w = 6

   f. x + y + z = b_1
   2x + 5y + 5z = b_2
   3x + 5y + 8z = b_3

BAB II

DETERMINAN

TUJUAN PEMBELAJARAN
Supaya mahasiswa mempunyai pengetahuan dasar dan pemahaman tentang konsep-konsep determinan, cara menghitung determinan, aplikasi determinan pada geometri
OUTCOME PEMBELAJARAN
Mahasiswa mempunyai kemampuan untuk melakukan perhitungan determinan, dapat menghunakan sebagai metode untuk menyelesaikan SPL dan mengaplikasikan pada bidang geometri

2.1. DETERMINAN

Determinan adalah sebuah fungsi yang memetakan / mengaitkan peubah matriks bujursangkar A dengan suatu bilangan real yang disebut determinan A atau det(A)

Misalkan ada sebuah determinan seperti dibawah ini :

$$(Det) = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{aa} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinan (Det) diatas mempunyai *n* baris dan *n* kolom. Determinan tersebut disebut sebagai determinan tingkat *n*. $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots, a_{nn}$. disebut elemen-elemen determinan. Untuk $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ adalah elemen-elemen diagonal pokok. Sedangkan $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \cdots, a_{n1}$ ini adalah diagonal kedua.

Sehingga elemen a_{pq} adalah elemen yang terletak di baris ke *p* dan di kolom *q*.

Contoh 2.1

Det. Tingkat 2

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Det. Tingkat 3

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

❖ SIFAT-SIFAT DETERMINAN

1. Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar

   a. Jika A mempunyai sebuah baris atau kolom yang elemennya semuanya nol, maka det(A)=0
   Contoh 2.2

   $$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

   b. Det(A)=det(A^T)

   Determinan Transpose diperoleh dari det(A) dengan menukar baris menjadi kolom, kolom menjadi baris.

   $$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \rightarrow \quad \det(A^T) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

   Contoh 2.3

   $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Jika baris ke i ditukar dengan baris ke-j (kolom i ditukar dengan kolom ke j) diperoleh det. Baru Δ_1 dengan nilai $\Delta_1 = -\Delta$.

3. Jika baris ke i = baris ke j (kolom ke i=kolom ke j) maka nilai $\Delta = 0$

4. Nilai det menjadi k kali jika semua elemen pada sebuah baris (kolom) digandakan dengan $k \neq 0$.

   Contoh 2.4

   $$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x3 & 2x2 & 2x5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5. jika ada 2 baris (2 kolom) yang sebanding maka nilai $\Delta = 0$.
6. Jika semua unsur dari satu baris atau kolom dapat ditulis sebagai jumlahan bilangan, maka determinan tersebut dapat ditulis sebagai jumlahan dua determinan.

$$\begin{vmatrix} (x_1+y_1) & b_1 & c_1 \\ (x_2+y_2) & b_2 & c_2 \\ (x_3+y_3) & b_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & b_1 & c_1 \\ x_2 & b_2 & c_2 \\ x_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & b_1 & c_1 \\ y_2 & b_2 & c_2 \\ y_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Contoh 2.5

$$\begin{vmatrix} 12 & 1 & 3 \\ 14 & 0 & 1 \\ 17 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+8 & 1 & 3 \\ 5+9 & 0 & 1 \\ 8+9 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

7. Jika A dan B adalah dua determinan yang berorde sama, maka det(AB)=det(A)det(B)

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \text{ maka:}$$

$$D_1 D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

2.2. PERLUASAN KOFAKTOR

Jika A adalah matriks bujur sangkar, maka ***minor*** dari elemen a_{pq} dari determinan tingkat *n* adalah sub determinan tingkat (*n*-1) yang diperoleh dengan mencoret baris ke *p* dan kolom ke *q*, diberi lambang M_{pq}.

Kofaktor dari elemen a_{pq} diberi lambang C_{pq} didefinisikan sbb:

$$C_{pq} = (-1)^{p+q} M_{pq}$$

Jika $p + q =$ genap $\rightarrow C_{pq} = M_{pq}$

Jika $p + q =$ gasal $\rightarrow C_{pq} = -M_{pq}$

Contoh 2.6

Minor dari elemen a_{21} dari determinan tingkat 3

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ adalah } M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ (*baris 2 kolom 1 dicoret/dihilangkan*)

❖ NILAI DETERMINAN

Misalkan A adalah matriks bujur sangkar, maka yang dimaksud dengan ***Nilai Determinan Matriks A atau det(A)*** adalah jumlah hasil elemen-elemen dari sebuah baris (kolom) dengan kofaktor-kofaktor yang bersesuaian. **(EXPANSI LAPLACE)**

$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \cdots + a_{1n}C_{1n}$ (Ekspansi menurut elemen baris ke-1).

Contoh 2.7

Hitung determinan A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

Det(A) = 3$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ - (-2)$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ + 5$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$

= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1

❖ ATURAN SARRUS

(Hanya berlaku untuk det.tingkat/orde 3)

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$\det(A) = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Contoh 2.8

Dapatkan nilai determinan berikut:

a). $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ b). $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix}$ c). $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 7 \\ 8 & 1 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -3 & 11 \\ 10 & 4 & -5 & -8 \end{vmatrix}$

Penyelesaian:

a) $\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right.$ =(-9-1+8)-(-6-6+2)=8

b) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0$, karena $b_3 = 2b_1$. (Sifat 6)

c) $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 7 \\ 8 & 1 & -4 & 6 \\ 6 & 2 & -3 & 11 \\ 10 & 4 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 0$, karena kolom 1= -2 kali kolom 3 (Sifat 6)

❖ MENGHITUNG DETERMINAN DENGAN MEREDUKSI BARIS

Metode ini adalah salah satu cara bagaimana kita bisa mereduksi determinan matriks sehingga pada baris atau kolom akan mengandung / mempunyai elemen yang banyak mengandung elemen nol (0).

Dengan demikian akan memudahkan kita dalam menghitung dengan menggunakan ekspansi baris atau kolom yang bayak nol-nya.

Contoh 2.9

Hitung determinan $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$

Penyelesaian

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{k_1-3k_3 \\ k_2-2k_3 \\ k_4-4k_3}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 25 & 2 & 6 \\ 7 & 13 & 3 & 5 \\ 9 & 23 & 8 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\exp B_1} +1\begin{vmatrix} 9 & 25 & 6 \\ 7 & 13 & 5 \\ 9 & 23 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{b_1-b_3} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 7 & 13 & 5 \\ 9 & 23 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\exp b_1} -(2)\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = -2(42-45) = 6\,.$$

Teorema:

"Jika A adalah suatu matriks segitiga n x n (segitiga atas, segitiga bawah atau diagonal), maka det(A) adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya; yaitu Det(A) = a_{11} a_{22}…..a_{nn} "

Contoh 2.10

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2)(-3)(6)(9)(4) = -1296$$

Dengan teorema diatas , suatu matriks dengan ukuran n x n dapat dijadikan /direduksi menjadi matriks segitiga atas / bawah sehingga memudahkan untuk mendapatkan nilai determinannya.

2.3. APLIKASI DETERMINAN PADA GEOMETRI

PERSAMAAN GARIS LURUS

Misalkan $A_1 = (x_1 , y_1)$ dan $A_2 = (x_2 ,y_2)$ adalah titik pada sebuah bidang, maka persamaan garis yang melalui kedua titik tersebut

ax +by + c + 0

Karena A_1 dan A_2 terletak pada garis tersebut maka

$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

Jika ketiga persamaan diatas dihimpun menjadi satu, maka akan terbentuk sistem persamaan linier homogen, yaitu

$$ax + by + c = 0$$
$$ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0$$

Supaya sistem persamaan linier diatas punya solusi nontrivial, maka determinan matrik koefisien harus sama dengan 0.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Contoh 2.11

Diketahui dua titik A_1 = (-1 , 2) dan A_2 = (0 ,1) pada sebuah bidang, tentukan persamaan garis yang melalui kedua titik tersebut

Penyelesaian

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga didapatka persamaan garisnya adalah x + y -1 = 0

SOAL-SOAL LATIHAN 1

1. Dapatkan nilai determinan:

a. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$ b. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -6 \end{vmatrix}$ c. $\Delta = \begin{vmatrix} -7 & -2 \\ 25 & 4 \end{vmatrix}$

2. Dapatkan nilai determinan:

a. $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$ b. $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{2}{5} \\ \frac{-1}{3} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$ c. $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$

3. Dapatkan nilai determinan:

a. $D = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ b. $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ c. $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 15 & 2 & 29 & 14 \\ 16 & 3 & 19 & 17 \\ 33 & 8 & 39 & 38 \end{vmatrix}$

4. Dapatkan nilai determinan:

a. $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 13 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ b. $D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ c. $D = \begin{vmatrix} 4 & 9 & -1 & 3 \\ -1 & -16 & 3 & 2 \\ -1 & 12 & -5 & 2 \\ -1 & -8 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

2.4. ADJOINT SUATU MATRIKS

Jika A adalah matriks n x n dan C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij} maka matriks

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

disebut matriks ***kofaktor dari A***.

Transpose dari matriks ini disebut ***adjoint A*** dan dinyatakan dengan ***Adj(A)***

Contoh

Dapatkan Adjoint dari matriks dibawah ini: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Penyelesaian:

Kofaktor dari A adalah

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-12) = 12 \quad \Rightarrow \quad C_{11} = (-1)^{1+1} 12 = 12$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-(6) = -6 \quad \Rightarrow \quad C_{12} = (-1)^{1+2}(-6) = 6$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4-(12) = -16 \quad \Rightarrow \quad C_{13} = (-1)^{1+3}(-16) = 16$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 0-(4) = -4 \quad \Rightarrow \quad C_{21} = (-1)^{2+1}(-4) = 4$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0-(-2) = 2 \quad \Rightarrow \quad C_{22} = (-1)^{2+2}(2) = 2$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -12-(4) = -16 \quad \Rightarrow \quad C_{23} = (-1)^{2+3}(-16) = 16$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6-(-6) = 12 \quad \Rightarrow \quad C_{31} = (-1)^{3+1}(12) = 12$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9-(-1) = 10 \quad \Rightarrow \quad C_{32} = (-1)^{3+2}(10) = -10$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 18 - (2) = 16 \qquad \Rightarrow \quad C_{33} = (-1)^{3+3}(16) = 16$$

Sehingga matriks kofaktornya : $\begin{pmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{pmatrix}$

Dan adjoinnya adalah transpose dari matriks kofaktor tersebut, yaitu

$$\text{Adj(A)=} \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

Dari adj(A) tersebut kita bisa mendapatan invers matriks dengan menggunakan

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\,(A)$$

Jadi $A^{-1} = \dfrac{1}{64} \begin{pmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$

2.5. ATURAN CRAMER

Jika Ax = b merupakan suatu sistem n persamaan linier dalam n peubah sedemikian sehingga (A) ≠ 0 , maka sistem tersebut mempunyai suatu penyelesaian yang unik. Penyelesaia ini adalah

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \; x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}, \ldots\ldots\; x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dengan menggantikan anggota-anggota pada kolom ke-j dari A dengan anggota-anggota pada matriks

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Penyelesaian sistem persamaan diatas dikenal sebagai ***ATURAN CRAMER***

Misalkan :

Suatu sistem persamaan linier dengan 3 persamaan dan 3 variabel dibawah ini

$$a_1x + a_2y + a_3z = k_1$$

$$b_1x + b_2y + b_3z = k_2$$

$$c_1x + c_2y + c_3z = k_3$$

maka matriks koefisiennya:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Untuk mendapatkan nilai x, y, z nya,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0, \ \det(A_1) = \begin{vmatrix} k_1 & a_2 & a_3 \\ k_2 & b_2 & b_3 \\ k_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \ \det(A_2) = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & a_3 \\ b_1 & k_2 & b_3 \\ c_1 & k_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k_1 \\ b_1 & b_2 & k_2 \\ c_1 & c_2 & k_3 \end{vmatrix}$$

Maka: $x = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}; y = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}; z = \dfrac{\det(A_3)}{\det(A)}$.

Contoh

Gunakan Aturan Cramer untuk menyelesaikan

x +   + 2z = 6

-3x + 4y + 6z = 30

-x - 2y + 3z = 8

Penyelesaian.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 44 \ , \ \det(A_1) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -40 \ , \ \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 72$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 152$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}; y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44}\frac{18}{11}; z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

SOAL-SOAL LATIHAN 2

1. Dapatkan semua minor maupun kofaktor dari matriks dibawah ini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Dengan menggunakan rumus invers dari penggunaan matriks adjoin dapatkan A^{-1} dari:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Selesaikan dengan Aturan Cramer

a. $7x - 3y = 3$
$3x + y = 5$

b. $4x + 5y = 2$
$11x + y + 2z = 3$
$x + 5y + 2z = 1$

c. $x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$
$2x_1 - x_2 = -2$
$4x_1 - 3x_3 = 0$

BAB III

VEKTOR DALAM R^2 DAN R^3

Dalam bagian ini akan dibahas masalah vekto-vektor dalam ruang berdimensi 2 dan berdimensi 3, operasi-operasi aritmetika pada vektor juga akan didefinisikan dan beberapa sifat-sifat dasar operasi-operasi tersebut.

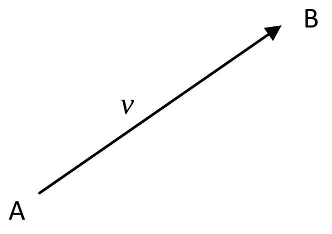
3.1. VEKTOR DALAM DIMENSI-2 dan DIMENSI -3

❖ **Pengantar Vektor**

Skalar adalah sebuah besaran yang tidak memiliki arah atau suatu kuantiti yang hanya mempunyai besar saja. Sedangkan vektor adalah sebuah besaran yang mempunyai arah. Contoh dari besaran vektor adalah kecepatan, percepatan, gaya. Sedangkan contoh untuk besaran skalar adalah waktu, temperatur, massa, panjang, bilangan real.

Vektor bisa ditulis secara geometris sebagai ruas garis yang berarah dalam ruang dimensi-2 dan dimensi-3. Arah panah menunjukan arah vektor.

contoh



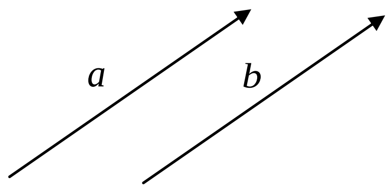
biasanya vektor disamping ditulis v = $\overrightarrow{AB} = a$

Ekor dari panah diatas disebut pangkal vektor dan ujung panah disebut titik ujung. Vektor biasanya dinotasikan dengan huruf kecil tebal (misalnya, **a,k,v,w** dan **x**)

❖ Operasi pada vektor

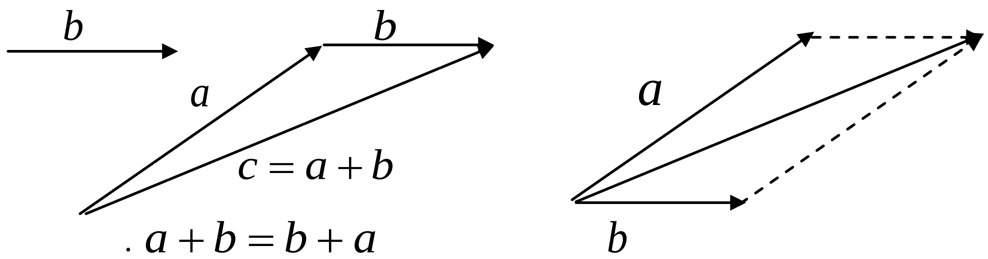
➢ Dua vektor yang sama / ekuivalen

Dua vektor dikatakan sama $(a = b)$ jika searah dan sama panjang.



Jumlah dua vektor

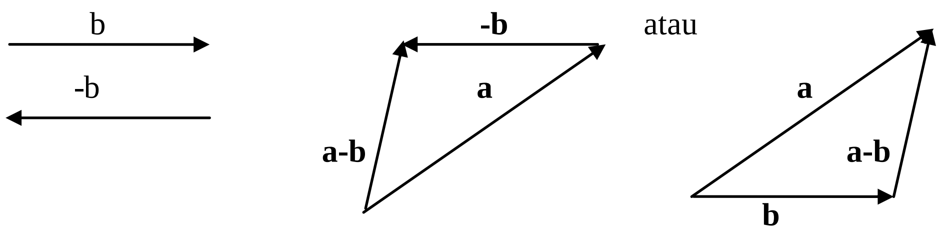
Jika a dan b adalah dua vektor sebarang, maka jumlah a + b adalah vektor yang ditentukan sebagai berikut : Letakan vektor b sedemikian sehingga titik pangkalnya bertautan dengan titik ujung vektor a. Vektor a + b didefinisikan oleh panah dari titik pangkal a ke titik ujung b .



$$a + b = b + a$$

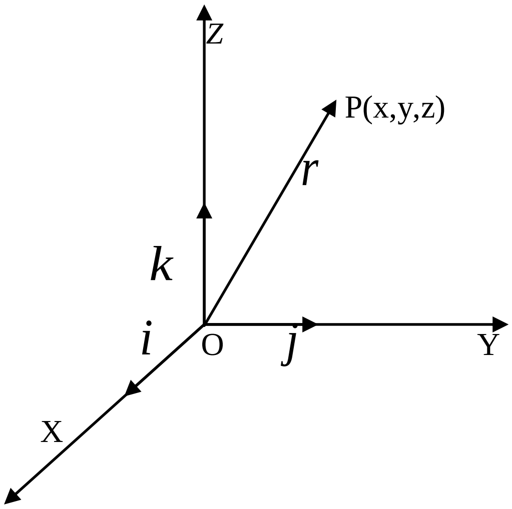
Selisih dua vektor

Jika **a** dan **b** adalah dua vektor sebarang, maka selisih b dari a didefinisikan sebagai **a-b** = **a + (-b)**



Untuk mendapatkan selisih **a-b** tanpa menyusun –**b**, posisikan **a** dan **b** sehingga titik-titik pangkalnya berimpitan; Vektor dari ujung **b** ke titik ujung **a** adalah vektor **a - b.**

- **Vektor dalam dimensi-3**



i, j, k adalah vektor-vektor satuan masing-masing pada arah sumbu X, sumbu Y, sb. Z

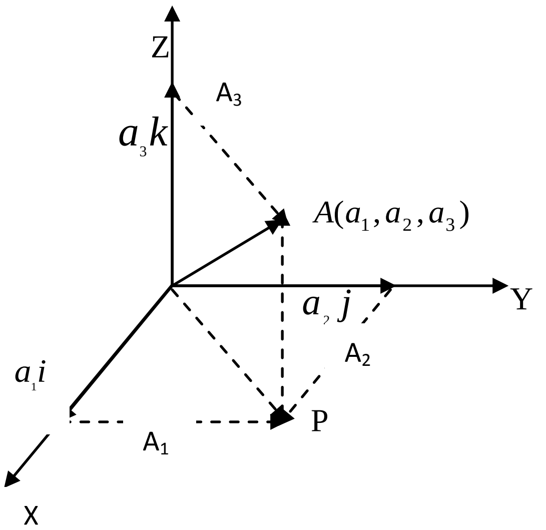
$|\,i\,| = 1,\ |j| = 1,\ |k| = 1.$

Vektor posisi r dari O ke P(x,y,z) adalah

$r = x\,i + y\ j + z\,k$ dengan panjang

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Komponen-komponen suatu vektor



$$\overrightarrow{OA} = a = a_1 i + a_2\,j + a_3 k$$

P proyeksi A pada bidang XOY

$$\overrightarrow{OA_1} = a_1 i,\ \overrightarrow{OA_2} = a_2\,j,\ \overrightarrow{OA_3} = a_3 k = \overrightarrow{PA}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = a_1 i + a_2\,j$$

$$a = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = a_1 i + a_2\,j + a_3 k$$

$$\Downarrow$$

$$a = |a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sifat-sifat Operasi Vektor

Jika **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi-2 dan ruang berdimensi-3 dan *k* , *l* adalah skalar, maka

a. **u** + **v** = **v** + **u**
b. (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**)
c. **u** + 0 = 0 + **u** = **u**
d. **u** + (-**u**) = 0
e. *k*(**u + v**) = ***k*u** + ***k*v**
f. (*k* + *l*)**u** = *k***u** + *l***u**

Contoh

Jika a = (1,-3,2) dan b = (4,2,1) maka

A + b = (5,-1,3) ,   2a = (2,-6,4),   a-b = (-3,-5,1)

SOAL-SOAL LATIHAN 1

1. Gambar vektor-vektor berikut dengan titik pangkal diletakkan pada titik asal :

   a. v_1 = (3, 6)   b. v_2 = (-4, -8)   c. v_3 = (3, 4, 5)

   d. v_4 = (3, 3, 0)   e. v_5 = (0, 0, 3)   f. v_6 = (-2, -3, -4)

2. Misalkan u = (-3, 1, 2), v = (4, 0, -8), dan w = (6, -1, -4) cari komponen dari

   a). v – w   b). 6u + 2v   c). –v + u   d). 5(v – 8w)   e). -3(v – w)

3. Jika u, v,dan w adalah sebarang vektor-vektor, dapatkan a, b, c sedemikian sehingga

   a**u** + b**v** + c**w** = (2, 0, 4)

4. Dapatkan a, b,dn c sedemikian sehingga

   a(-2, 9, 6) + b(2, 1, 1) + c(0, 3, 1) = (0, 0, 0)

3.2. NORMA SUATU VEKTOR dan HASIL KALI TITIK (Dot Product)

❖ DEFINISI NORMA SUATU VEKTOR

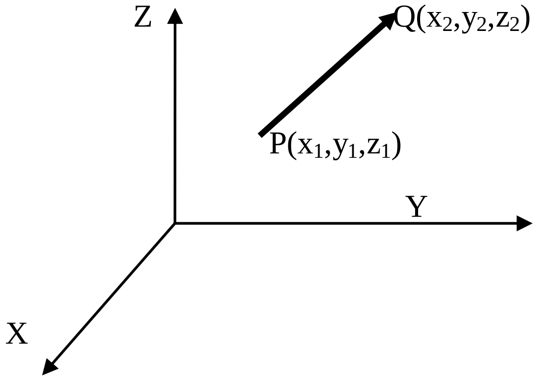
Panjang suatu vektor ***u*** atau norma ($\|u\|$) didefinisikan

$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ (*norma vektor u = (u_1,u_2) dalam ruang berdimensi-2*)

$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ (*norma vektor u = (u_1,u_2,u_3) dalam ruang berdimensi-3*)

Jika P(x_1,y_1,z_1) dan Q(x_2,y_2,z_2) adalah dua titik dalam ruang berdimensi-3, maka jarak antara kedua titik tersebut adalah norma vektor

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$



Contoh

a. Norma Vektor ***u*** = (-3,2,1) adalah

$$\|u\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

b. Jarak antara titik P(2,-1,-5) dan Q(4,-3,1) adalah

$$\left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \sqrt{(4-2)^2 + (-3+1)^2 + (1+5)^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$$

❖ **HASIL KALI TITIK (Dot Product)**

Definisi Hasil Kali Titik

Jika u dan v adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi-2 atau berdimensi-3 dan θ adalah sudut antara ***u*** dan ***v***, maka hasil kali titik atau hasil kali dalam Euclidean didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = \begin{cases} \|u\|\|v\| cos\ \theta\ jika\ u \neq 0\ dan\ v \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\quad jika\ u = 0\ atau\ v = 0 \end{cases}$$

Rumus komponen untuk hasil kali titik

Misal ***u*** =(u_1,u_2,u_3) dan ***v*** = (v_1,v_2,v_3) maka

$$\mathbf{u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

Sedangkan untuk mendapatkan sudut antara dua vektor :

$$cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$$

Contoh

Misalkan ***u*** (2,-1,1) dan ***v*** = (1,1,2) , dapatkan ***u·v*** dan tentukan sudut θ antara ***u*** dan ***v***

Penyelesaian

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 3$$

$$cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

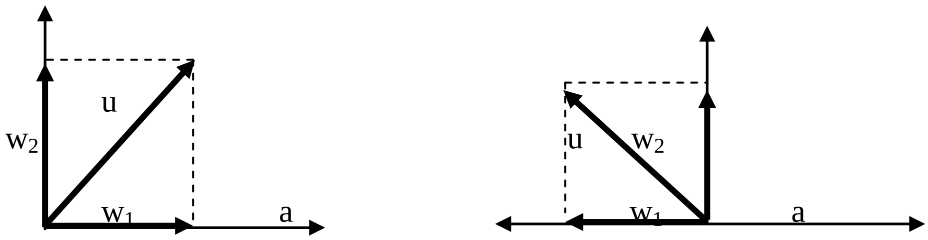
Sifat-Sifat Hasil Kali Titik

Jika u, v, dan w adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 atau berdimensi 3 dan k adalah suatu skalar, maka :

a. $u \cdot v = v \cdot u$
b. $u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
c. $k(u \cdot v) = (ku) \cdot v = u \cdot (kv)$
d. $v \cdot v > 0$ jika $v \neq 0$, dan $v \cdot v = 0$ jika $v = 0$

❖ PROYEKSI ORTOGONAL

Vektor-vektor yang tegak lurus disebut juga vektor-vektor ortogonal. Dua vektor u dan v ortogonal (tegak lurus) jika dan hanya jika $u \cdot v = 0$.



Vektor u adalah jumlah dari w_1 dan w_2 , dimana w_1 sejajar dengan a dan w_2 tegak lurus dengan a.
Vektor w_1 disebut proyeksi ortogonal dari u pada a atau komponen vektor dari u yang sejajar dengan . ini dinyatakan dengan

$$\text{Proy}_a\, u = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a$$

Sedangkan vektor w_2 disebut vektor yang ortogonal terhadap a. Karena w_2= u-w, maka vektor ini bisa ditulis sebagai

$$u - \text{Proy}_a\, u = u - \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a$$

Contoh
Misal u = (2,-1,3) dan a = (4,-1,2). Dapatkan komponen vektor dari u yang sejajar vektor a dan vektor yang ortogonal terhadap a
Penyelesaian

$u \cdot a = (2)(4) + (-1)(-1) + (3)(2) = 15$

$\|a\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21$

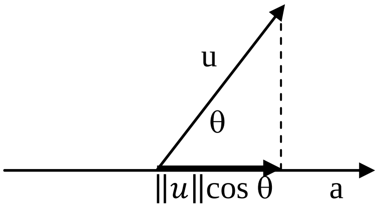
Jadi, komponen vektor u yang sejajar a adalah

$\text{Proy}_a\, u = \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = \frac{15}{21}(4, -1{,}2) = (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7})$

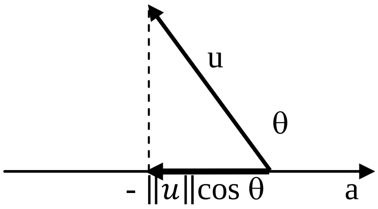
Dan komponen vektor u yang ortogonal terhadap a adalah

$u - \text{Proy}_a\, u = u - \frac{u \cdot a}{\|a\|^2} a = (2,-1,3) - (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}) = (-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7})$

Secara ilustrasi geometris dapat digambar seperti dibawah ini



$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$



$\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$

SOAL- SOAL LATIHAN 2

1. Dapatkan norma dari vektor v
   a. v = (4, -3) b. (2, 2, 2) c. v = (-7, 2, -1) d. v = (0, 6, 0)

2. Dapatkan jarak antara A dan B
   a. A(3, 4), B(5, 7) b. A(-3, 6), B(-1, -4)
   c. A(7, -5, 1), B(-7, -2, -1) d. A(3, 3, 3), B(6, 0, 3)

3. Jika u = (2, -2, 3), v = (1, -3, 4), dan w = (3, 6, -4), maka tunjukkan :
   a. $\|u + v\|$ b. $\|u\| + \|v\|$
   c. $\|-2u\| + 2\|u\|$ d. $\|3u - 5v + w\|$

4. Dapatkan **u·v**
   a. u = (2, 3), v = (5, -7) b. u = (-6,-2), v = (4, 0)
   b. u = (1, -5, 4), v = (3, 3, 3) d. u = (-2, 2, 3), v = (1, 7, -4)

5. Dapatkan proyeksi ortogonal dari u terhadap a
   a. u = (6, 2), a = (3, -9) b. u = (-1, -2), a = (-2, 3)
   c. u = (3, 1, -7), a = (1, 0, 5) d. u = (1, 0, 0), a = (4, 3, 8)

3.3. HASIL KALI SILANG (Cross Product)

- **Definisi Hasil Kali Silang**

Jika u =(u_1,u_2,u_3) dan v = (v_1,v_2,v_3) adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3, maka hasil kali silang u x v adalah vektor yang didefinisikan sebagai

$$u \times v = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

atau dalam notasi determinan

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Contoh

Dapatkan u x v, dimana u = (1,2,-2) dan v = (3,0,1)

Penyelesaian

$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \; -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2,-7,-6)$$

Hubungan antara Hasil kali Titik dan Hasil Kali Silang

Jika u, v, dan w adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3, maka :

a. u · (u x v) = 0
b. v · (u x v) = 0
c. $\|uxv\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2$
d. u x (v x w) = (u · w)v - (u · v)w
e. (u x v) x w = (u · w)v - (v · w)u

Sifat-Sifat Aritmetika Hasil Kali Silang

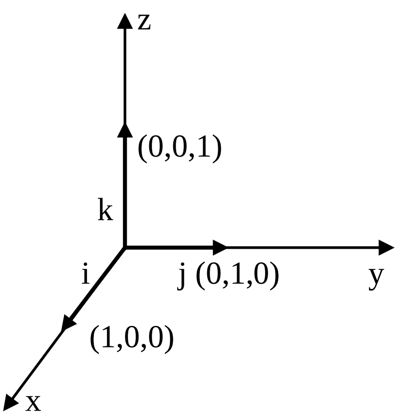
Jika u, v, dan w adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3 dan k adalah sebarang skalar, maka :

a. u x v = - (v x u)
b. u x (v x w) = (u x v) + (u x w)
c. (u x v) x w = (u x w) + (v x w)
d. k(u x v) = (ku) x v = u x (kv)
e. u x 0 = 0 x u = 0
f. u x u = 0

Vektor-vektor yang mempunyai panjang satu dan terletak disumbuh koordinat disebut vektor satuan standart. Setiap vektor v = (v_1, v_2, v_3) dalam ruang berdimensi 3 dapat dinyatakan dalam bentuk i, j, dan k

$$v = (v_1, v_2, v_3) = v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = v_1 i + v_2 j + v_3 k$$

Contoh. Misalkan v = (2, -3, 4) = 2i – 3j + 4k



i x i = j x j = k x k = 0

i x j = k ; j x k = i ; k x i = j

j x i = -k ; k x j = -i ; i x k = -j

Gambar . ***Vektor satuan standart***

Interpretasi Geometris dari Hasil Kali Silang

Luas jajaran genjang yang dibentuk u dan v, adalah :

$$L = \|u\,x\,v\| = \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \right\|$$

Luas segitiga yang dibentuk u dan v :

$$L_\Delta = \frac{1}{2}\|u\,x\,v\| = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \right\|$$

Volume balok miring (Paralelepipedum) dengan sisi-sisi u, v, w :

$$V = \|u \bullet (v\,x\,w)\| = \left\| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \right\|$$

Contoh

1. Dapatkan luas segitiga yang titik-titik sudutnya P(2, 3, 5); Q(4, 2, -1); R(3, 6, 4)

   Penyelesaian:

   $$\overrightarrow{PQ} = (4-2)i + (2-3)j + (-1-5)k = 2i - j - 6k$$

   $$\overrightarrow{PR} = (3-2)i + (6-3)j + (4-5)k = i + 3j - k$$

   Luas segitiga: $L = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \text{ x } \overrightarrow{\mathrm{PR}}\right| = \frac{1}{2}\left|(2i - j - 6k) \text{ x } (i + 3j - k)\right|$

   $$= \frac{1}{2}\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2}|19i - 4j + 7k| = \frac{1}{2}\sqrt{19^2 + (-4)^2 + 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{426}.$$

2. Dapatkan volume parallelepipedum yang sisi-sisinya $au = 2i - 3j + 4k, v = i + 2j - k,\ w = 3i - j + 2k.$

   Penyelesaian:

   $$V = |u \bullet (v\,x\,w)| = \left| \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = |-7| = 7.$$

SOAL-SOAL LATIHAN 3

1. Jika u = (3, 2, -1), v = (0, 2, -3), dan w = (2, 6, 7). Dapatkan

   a. u x v   b. u x (v x w)   c. (u x v) x w

   d. (u x v) x (v x w)   e. u x(v – 2w)   f. (u x v) – 2w

2. Dapatkan luas segitiga yang mempunyai titik-titik sudut berikut:

   a). A(0,0,0); B(1,2,3); C(2,-1,4)   b). D(1,0,0); E(0,1,0); F(1,1,1)

3. Dapatkan luas jajaran genjang yang dibentuk oleh dua buah vektor:

   a). $a = 3i + 2j$ dan $b = 2j - 4k$ b). $a = i + 2j + 2k$ dan $b = 3i - 2j + k$.

4. Dapatkan isi parallelepipedum yang sisi-sisinya OA, OB, OC dimana A(1,2,3); B(1,1,2); C(2,1,1).

BAB IV

RUANG-RUANG VEKTOR

Dalam bagian ini akan dibahas masalah vekto-vektor dalam ruang berdimensi yang lebih luas lagi yaitu ruang berdimensi–n, meskipun pengambaran secara geometris tidak melebihi ruang berdimensi-3. Untuk itu dalam hal ini akan dipelajari berdasarkan sifat-sifat dari titik dan vektor tersebut.

4.1. RUANG BERDIMENSI-n EUCLIDEAN

❖ **Definisi Vektor Dalam Ruang Berdimensi-n**

Jika n adalah bilangan bulat positif, maka *ganda-n berurut* adalah sederet n bilangan real. Semua himpunan *ganda-n berurut* disebut ***ruang berdimensi-n (R^n)***

➢ **Operasi-operasi pada R^n** :

a. Dua Vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2,..., u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2,..., v_n)$ dalam R^n disebut sama jika

$$u_1 = v_1,\ u_2 = v_2,\ ......, u_n = v_n$$

b. Jumlah **u + v didefinisikan sebagai**

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ ......, u_n + v_n)$$

c. Perkalian skalar $k\mathbf{u}$ didefinisikan sebagai

$$k\mathbf{u} = (ku_1,\ ku_2, ..., ku_3)$$

➢ **Sifat-sifat operasi vektor dalam R^n**

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2,..., u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2,..., v_n)$, dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2,..., w_n)$ adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi-n dan k , l adalah skalar, maka

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
c. $\mathbf{u} + 0 = 0 + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
d. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = 0$
e. $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\mathbf{u} + k\mathbf{v}$
f. $(k + l)\mathbf{u} = k\mathbf{u} + l\mathbf{u}$
g. $l\mathbf{u} = \mathbf{u}$

- **Ruang Berdimensi-n EUCLIDEAN**

Jika u =(u_1,u_2,...,u_n) dan ***v*** = (v_1,v_2, ...,v_n) adalah sebarang vektor dalam R^n , maka *hasil kali dalam Euclidean* **u·v didefinisikan**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u_1 v_1 + u_2 v_2 + ...+ u_n v_n}$$

Contoh

Dapatkan hasil kali dalam Euclidean dari vektor-vektor dalam R^4 dibawah ini:
u = (-1, 3, 5, 7) dan **v** = (5, -4, 7, 0)
penyelesaian

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (-1)(5) + (3)(-4) + (5)(7) + (7)(0) = \mathbf{18}$$

Sebuah ruang R^n yang ditunjukan dengan operasi penjumlahan, perkalian skalar dan hasil kali dalam Euclidean disebut sebagai **Ruang berdimensi-n Euclidean**

Jika **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor dalam R^n dan k adalah suatu skalar, maka :

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
b. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{w}$
c. $k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (k\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (k\mathbf{v})$
d. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ jika $\mathbf{v} \neq 0$, dan $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ jika $\mathbf{v} = 0$

- **Norma dan Jarak dalam Ruang Berdimensi-n**

Misalkan u =(u_1,u_2,...,u_n), Norma atau panjang dalam R^n dari vektor **u** disebut norma Euclidean (panjang Euclidean) vektor **u** yang didefinisikan

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

Sedangkan jarak Eucliden antara titik-tik ***u*** =(u_1,u_2,...,u_n) dan ***v*** =(v_1,v_2,...,v_n) dalam R^n didefinisikan sebagai

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh

Jika **u** = (1, 3, -2, 7) dan **v** = (0, 7, 2, 2) dalam ruang Euclidean R^4, dapatkan norma **u** dan jarak antara titik **u** dan **v**

penyelesaian

$$\|u\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-2)^2 + (7)^2} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7} \qquad \text{dan}$$

$$d(u, v) = \sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 7)^2 + (-2 - 2)^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{58}$$

Teorema

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor dalam R^n dan k adalah sebarang skalar, maka:

a. $\|u\| \geq 0$
b. $\|u\| = 0 \; jika \; dan \; hanya \; jika \; u = 0$
c. $\|ku\| = |k|\|u\|$
d. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

❖ **Keortogonalan**

Dua vektor **u** dan **v** dalam R^n disebut orthogonal jika **u** · **v** = 0.

Contoh

Misalkan: **u** = (-2, 3, 1, 4) dan **v** = (1, 2, 0, -1) adalah vektor dalam ruang Euclidean R^4. Tunjukan bahwa **u** orthogonal dengan **v**.

Penyelesaian.

Akan ditunjukkan bahwa u · v = 0

u · **v** = (-2)(1) + (3)(2) + (1)(0) + (4)(-1) = -2 + 6 + 0 + (-4) = 0

karena **u** · **v** = 0 maka u orthogonal dengan **v**.

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor orthogonal dalam R^n denan hasil kali dalam Euclidean, maka

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

SOAL LATIHAN 1

1. Misalkan u = (-3, 2, 1, 0), v = (4, 7, -3, 2), dan w = (, -2, 8, 1). Dapatkan:

a. v – w b. 2u + 7v c. –u + (v – 4v)

d. 6(u – 3v) e. –v – w f. (6v – w) – (4u + v)

2. Misalkan diberikan u = (4, 1, 2, 3), v = (0, 3, 8, -2), dan w = (3, 1, 2, 2). Hitunglah :

a. $\|u + v\|$ b. $\|u\| + \|v\|$ c. $\|-2u\| + 2\|u\|$

d. $\|3u - 5v + w\|$ e. $\frac{1}{\|w\|} w$ f. $\left\|\frac{1}{\|w\|} w\right\|$

3. Dapatkan jarak Euclidean antara u dan v

   a. u = (1,-2) dan v = (2, 1) b. u = (2, -2, 2) dan v = (0, 4, -2)

   c. u = (0, -2, -1, 1) dan v = (-3, 2, 4, 4) d. u = (3,-3,-2,0, -3) dan v = (-4,1,-1,5, 0)

4. Untuk nilai k berapakah u dan v orthogonal?

   a.u = (2, 1, 3) dan v = (1, 7, k) b. u = (k, k,1) dan v = (k, 5, 6)

4.2. RUANG VEKTOR UMUM

❖ **Definisi**

Misalkan V adalah sebarang himpunan tak kosong dari objek dimana dua operasi didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). Penjumlahan yang dimaksud adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap objek u dan v dalam V dengan suatu objek **u** + **v**, yang disebut jumlah **u** dan **v**. Sedangkan perkalian scalar adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap skalar dan setiap objek **u** dalam V dengan *k***u**, yang disebut perkalian skalar dari **u** dengan *k*.

Untuk bisa dikatakan sebagai RUANG VEKTOR, maka V harus memenuhi aksioma-aksioma berikut, yaitu:

Misalkan **u, v, w** dalam V dan *k* dan *l* adalah scalar

1. Jika u dan v adalah objek-objek dalam V, maka u + v berada dalam V
2. u + v = v + u
3. u + (v + w) = (u + v) + w
4. Ada suatu objek 0 dalam V, yang disebut suatu vector nol untuk V, sedemikian sehingga 0 + u = u + 0 = u untuk semua u dalam V
5. Untuk setiap u dalam V, ada suatu objek –u dalam V, yang disebut negative dari u, sedemikian sehingga u +(-u) = (-u) + u = 0
6. Jika k adalah sebarang scalar dan u adalah sebarang objek dalam V, maka ku ada dalam V
7. k(u + v) = ku + kv
8. (k + l)u = ku + lu
9. k(lu) = (kl)u
10. lu = u

Untuk skalar bisa berupa bilangan real maupun bilangan kompleks. Ruang vektor yang skalarnya berupa bilangan real disebut ***ruang vektor real***. Sedangkan ruang vektor yang skalarnya berupa bilangan kompleks disebut ***ruang vektor kompleks***.

Contoh ruang vektor

Tunjukkan bahwa himpunan V dari semua matriks 2 x 2 dengan anggota bilangan real merupakan suatu ruang vektor.

Penyelesaian

Untuk menunjukkan V adalah ruang vektor, maka harus diperiksa aksioma yang menjadi syarat ruang vektor. Untuk lebih mudahnya ambil urutan sebagai berikut : 1, 6, 2, 3, 7, 8, 9, 4, 5, dan 10.

Misal $u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ dan $v = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$

Aksioma 1.
Tunjukkan u + v ada dalam V atau u + v adalah matriks ukuran 2 x 2

$$u + v = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} + v_{11} & u_{12} + v_{12} \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} \end{pmatrix}$$

Dari hasil penjumlahan dapat ditunjukan u + v adalah matriks ukuran 2 x 2

Aksioma 6
Untuk sebarang bilangan k, maka kita dapatkan

$$ku = k\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{pmatrix}$$

Aksioma 2.

$$u + v = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = v + u$$

Demikian juga untuk aksioma 7, 8, dan 9

Untuk aksioma 5

$-u = \begin{pmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{pmatrix}$, akan ditunjukan bahwa u + (-u) = 0

$$u + (-u) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Untuk aksioma 10

$$1u = 1\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = u$$

Jadi karena semua aksioma terpenuhi, maka V adalah ruang vektor

4.3. SUB - RUANG

❖ **Definisi**

Suatu himpunan bagian W dari suatu ruag vektor V disebut suatu sub-ruang dari V jika W sendiri adalah suatu ruang vektor dibawah penjumlahan danperkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Teorema

Jika W adalah suatu himpunan satu atau lebih vektor dari suatu ruang vektor V, maka W adalah sub-ruang dari V jika dan hanya jika syarat-syarat berikut terpenuhi:

a. Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor dalam W, maka **u + v** ada dalam W
b. Ika *k* adalah sebarang skalar dan **u** adalah sebarang vektor dalam W, maka *k***u** ada dalam W

Contoh sub-ruang:

Sub-ruang dari R^2

1. {0}
2. Garis-garis yang melalui titik asal
3. R^2

Sub-ruang dari R^3

1. {0}
2. Garis-garis yang melalui titik asal
3. Bidang-bidang yang melalui titik asal
4. R^3

❖ **Ruang-ruang Vektor Penyelesaian untuk Sistem – Sistem Homogen**

Jika Ax = 0 adalah suatu sistem linier homogen dari m persamaan dalam n peubah, maka himpunan penyelesaiannya adalah sub-ruang dari R^n

Contoh

Tinjau sistem dibawah ini

$$u = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Penyelesaian:

Penyelesaiannya adalah

$$x = 2s - 3t, \quad y = s, \quad z = t$$

yang daripadanya didapatkan bahwa

$$x = 2y - 3z \text{ atau } x - 2y + 3z = 0$$

ini adalah persamaan bidang yang melalui titik asal dengan n = (1, -2, 3) sebagai suatu vektor normalnya.

- **Kombinasi Linier Vektor-vektor**

Suatu vektor w disebut suatu kombinasi linier dari vektor-vektor v_1, v_2, … , v_r jika bisa dinyatakan dalam bentuk

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_rv_r \quad \text{dengan } k_1, k_2, \dots, k_r \text{ adalah skalar}$$

Contoh

Misalkan vektor u = (1, 2, -1) dan v = (6, 4, 2) dalam R^3.
Tunjukan bahwa w = (9, 2, 7) adalah kombinasi linier dari u an v dan w' = (4, -1, 8) bukanlah kombinasi linier dari u dan v.

Penyelesaian.
Agar w menjadi suatu kombinasi linier, maka harus ada skalar k_1 dan k_2 sedemikian sehingga $w = k_1u + k_2v$; yaitu

$(9, 2, 7) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$ atau $(9, 2, 7) = (k_1 + 6k_2, 2\,k_1 + 4k_2, -\,k_1 + 2k_2)$
Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 9 \\ 2\,k_1 + 4k_2 &= 2 \\ -\,k_1 + 2k_2 &= 7 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas didapatkan $k_1 = -3$ dan $k_2 = 2$, sehingga

$$w = -3u + 2v$$

demikian juga untuk w'.
$(4, -1, 8) = k_1(1, 2, -1) + k_2(6, 4, 2)$ atau $(4, -1, 8) = (k_1 + 6k_2, 2\,k_1 + 4k_2, -\,k_1 + 2k_2)$
Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} k_1 + 6k_2 &= 4 \\ 2\,k_1 + 4k_2 &= -1 \\ -\,k_1 + 2k_2 &= 8 \end{aligned}$$

Dari persamaan diatas, tidak didapatka sebuah penyelesaian karena sistem tersebut tidak konsisten, sehingga tidak ada skalar k_1 dan k_2 yang memenuhi.

4.4. KEBEBASAN LINIER

- **Definisi Kebebasan Linier**

Jika S = { v_1, v_2, …, v_n) adalah suat himpunan vektor-vektor tak kosong, maka persamaan vektor

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n = 0$$

mempunyai paling tidak satu penyelesaian, yaitu

$$k_1 = 0,\ k_2 = 0\ ,\ \dots\ k_n = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya penyelesaian, maka S disebut suatu himpunan yang ***bebas secara linier***. Jika ada penyelesaian-penyelesaian lainnya, maka S disebut himpunan yang ***tak-bebas secara linier***.

Contoh

Tentukan apakah vektor-vektor

$v_1 = (1, -2, 3)$, $v_2 = (5, 6, -1)$, $v_3 = (3, 2, 1)$

membentuk suatu himpunan yang tak-bebas secara linier atau himpunan yang bebas secara linier.

Penyelesaian

Dalam bentuk komponen, persamaan vektor

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

menjadi

$$k_1(1, -2, 3) + k_2(5, 6, -1) + k_3(3, 2, 1) = (0, 0, 0)$$

atau

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0, 0, 0)$$

Dengan menyamakan komponen yang berpadanan didapatkan

$$\begin{aligned} k_1 + 5k_2 + 3k_3 &= 0 \\ -2k_1 + 6k_2 + 2k_3 &= 0 \\ 3k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Penyelesaian sistem diatas adalah

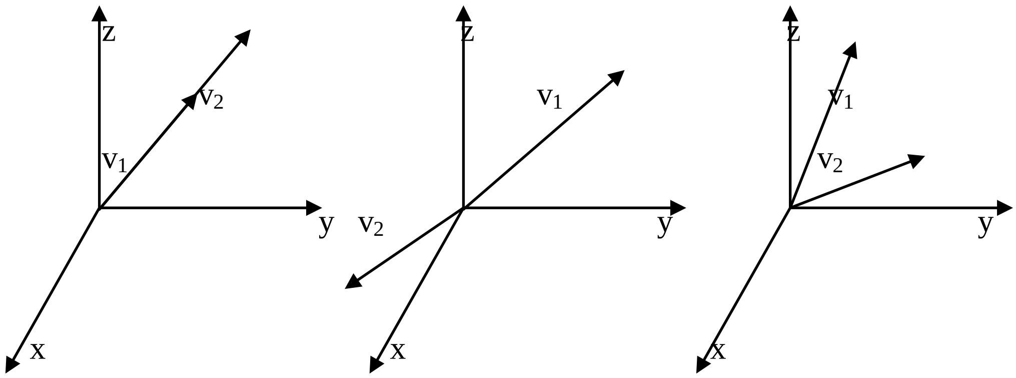
$$k_1 = -\frac{1}{2}t \text{ , } k_2 = -\frac{1}{2}t \text{ , } k_3 = t$$

Jadi sistem tersebut mempunyai penyeesaian tak-trivial, sehingga vektor-vektor diatas membentuk himpunan yang tak bebas secara linier

❖ Interpretasi Geometris dari Kebebasan Linier

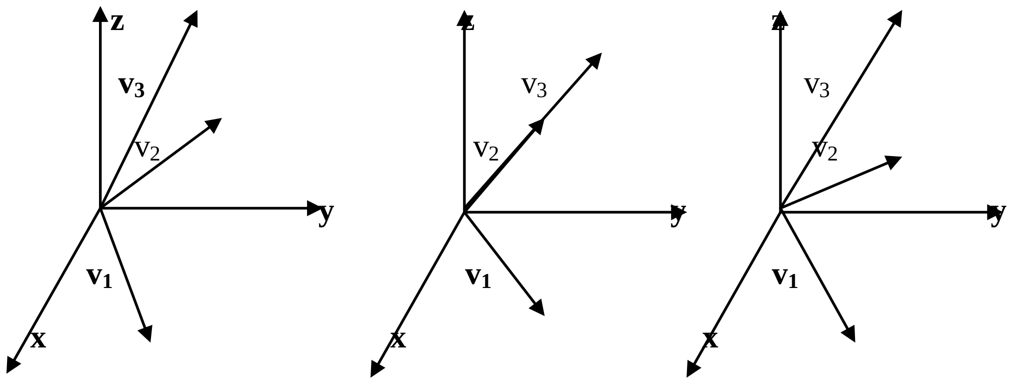
Kebebasan linier mempunyai suatu interpretasi geometris yang berguna dalam R^2 dan R^3

- Dalam R^2 atau R^3 , suatu himpunan du vektor bebas secara linier jika dan hanya jika vektor-vektor terebut idak terletak pada garis yang sama jika keduanya ditempatkan dengan titik-titik pangkalnya dititik asal.



a. tak-bebas secara linier ***b. tak-bebas secara linier*** ***c. bebas secara linier***

- Dalam R^3 , suatu himpunan tiga vektor bebas secara linier jika da hanya jika vektor-vektor tersebut tidak terletak pada bidang yang sama jka ketiganya ditempatkan dengan titik-titik pangkalnya pada titik asal.



v_2 dan v_3 sebidang **v_2 dan v_3 sebidang** **tidak ada yg sebidang**

(tak bebas secara linier) ***(tak bebas secara linier)*** ***(bebas secara linier)***

LATIHAN-LATIHAN SOAL 2

1. Manakah dari himpunan vektor-vektor dalam R^3 berikut ini yang tak-bebas secara linier
   a. (4, -1, 2), (-4, 10, 2)
   b. (-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)
   c. (8, -1, 3), (4, 0, 1)
   d. (2, 0, 1), (3, 2, 5), (6, -1, 1), (7, 0, -2)

2. Manakah dari himpunan vektor-vektor dalam R^4 berikut ini yang tak-bebas secara linier
   a. (4, 8, 7, -3), (1, 5, 3, -1), (2, -1, 2, 6), (1, 4, 0, 3)
   b. (0, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 0), (1, 1, 0, -1)
   c. (0, 3, -3, -6), (-2, 0, 0, -6), (0, -4, -2, -2), (0, -8, 4, -4)
   d. (3, 0, -3, 6), (0, 2, 3, 1), (0, -2, -2, 0), (-2, 1, 2, 1)

BAB V

NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Dalam bagian ini akan dibahas masalah vector-vektor tak nol yang dipetakan kedalam kelipatan-kelipatan scalar dari dirinya sendiri oleh operator linier. Umumnya permasalahan ini muncul dalam studi mengenai vibrasi, genetika, dinamika populasi, mekanika kuantum, dan ekonomi, seperti yang biasa dipelajari dalam geometri.

6.1. Definisi

Sebuah matriks bujur sangkar dengan orde n x n misalkan A, dan sebuah vektor kolom X. Vektor X adalah vektor dalam ruang Euklidian R^n yang dihubungkan dengan sebuah persamaan:

$$AX = \lambda X$$

Dimana λ adalah suatu skalar dan X adalah vektor yang tidak nol Skalar λ dinamakan nilai Eigen dari matriks A. Nilai eigen adalah nilai karakteristik dari suatu matriks bujur sangkar. Vektor X dalam persamaan (7.1) adalah suatu vektor yang tidak nol yang memenuhi persamaan (7.1) untuk nilai eigen yang sesuai dan disebut dengan vektor eigen. Jadi vektor X mempunyai nilai tertentu untuk nilai eigen tertentu.

Contoh

Misalkan Sebuah vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan sebuah matriks bujur sangkar orde 2 x 2 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, Apabila matriks A dikalikan dengan X maka:

$$AX = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 \\ 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Dimana:

$$\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \lambda X$$

Dengan konstanta $\lambda = 4$ dan

$$\begin{bmatrix}4 & 0\\4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Memenuhi persamaan (7.1). Konstanta $\lambda = 4$ dikatakan nilai eigen dari matriks bujur sangkar $A = \begin{bmatrix}4 & 0\\4 & 2\end{bmatrix}$

Contoh

Sebuah vektor $X = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ dan sebuah matriks $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}$.

Apabila matriks A dikalikan X didapat:

$$AX = \begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+4\\0+3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$$

Dimana:

$$\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \lambda X$$

dengan $\lambda = 3$. Maka $\lambda = 3$ adalah nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 3\end{bmatrix}$.

Contoh

Sebuah vektor $X = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ dan mateiks $A = \begin{bmatrix}4 & 0\\8 & 2\end{bmatrix}$ bila matriks A dikalikan dengan X maka:

$$AX = \begin{bmatrix}4 & 0\\8 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0+0\\0+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$$

Dimana:

$$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \text{ dengan } \lambda = 2.$$

$\lambda = 2$ adalah nilai eigen dari matriks $\begin{bmatrix}4 & 0\\8 & 2\end{bmatrix}$ dan vektor $X = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ adalah vektor eigen dari matriks $\begin{bmatrix}4 & 0\\8 & 2\end{bmatrix}$ yang bersesuaian dengan nilai eigen $\lambda = 2$.

Contoh

Sebuah vektor $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Perkalian matriks A dengan X adalah:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+6 \\ 6+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Dimana $\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Konstanta $\lambda = 3$ adalah nilai eigen dari matriks bujur sangkar $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

Contoh

Sebuah vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Matriks A dikalikan X didapat:

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+2 \\ 2+1+0 \\ 3+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda X$$

dengan $\lambda = 3$ adalah nilai eigen matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Contoh

Sebuah vektor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Perkalian matriks A dan X adalah:

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0+0 \\ 2+2+0 \\ 0+0+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \lambda X \text{ , dengan } \lambda = 2.$$

Maka $\lambda = 2$ adalah nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6.2 NILAI EIGEN

Kita tinjau perkalian matriks A dan X dalam persamaan (7.1) apabila kedua sisi dalam persamaan tersebut dikalikan dengan matriks identitas didapatkan:

$$IAX = I\lambda X$$

$$AX = \lambda IX$$

$$[\lambda I - A]X = 0 \qquad (7.2)$$

Persamaan (7.2) terpenuhi jika dan hanya jika:

$$\det\,[\lambda I - A] \qquad (7.3)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (7.3) dapat ditentukan nilai eigen (λ) dari sebuah matriks bujur sangkar A tersebut/

Contoh

Dapatkan nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Dari persamaan maka:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

$(\lambda - 2)(\lambda - 2) - 3 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 3 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

Dengan menggunakan rumus abc didapatkan:

$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.1}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Maka penyelesaian adalah: $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$ dan $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Nilai eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ adalah:

$\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$ dan $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$

Contoh

Dapatkan nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

Nilai eigen ditentukan dengan persamaan:

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ 1 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = 0$$

maka:

$(\lambda - 4)(\lambda - 5) - 1 = 0$

$\lambda^2 - 9\lambda + 20 - 1 = 0$

$\lambda^2 - 9\lambda + 19 = 0$

Dengan rumus abc didapatkan:

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.1.19}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-76}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Didapatkan $\lambda_1 = 4{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ dan $\lambda_2 = 4{,}5 - \frac{1}{2}\sqrt{5}$, jadi nilai eigen matriks

A = $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda = 4{,}5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Contoh

Dapatkan nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Nilai eigen ditentukan dari persamaan:

$$\det\left[\lambda I - A\right] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda & 3 \\ 2 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1) - 6 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2) = 0$$

Penyelesaian persamaan tersebut adalah:

$$\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = 3$$

dan

$$\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = 2$$

Jadi nilai eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda = 3$ dan $\lambda = 2$.

Contoh .

Dapatkan nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Determinan dari $[\lambda I - A] = 0$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 0 \\ 3 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda - 5) - 0 = 0$$

Penyelesaian persamaan adalah:

$\lambda - 4 = 0$ dan $\lambda - 5 = 0$

$\lambda = 4$ $\lambda = 5$

Jadi nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ adalah: $\lambda_1 = 4$ dan $\lambda_2 = 5$.

Contoh

Carilah nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

penyelesaian

$$\det [\lambda I - A] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 3 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 2) - \{3(\lambda - 2)\} = 0$$

$$(\lambda - 2)\{(\lambda - 4)(\lambda - 2) - 3\} = 0$$

$$(\lambda - 2)\{\lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3\} = 0$$

$$(\lambda - 2)\{\lambda^2 - 6\lambda + 5\} = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda - 5) = 0$$

Penyelesaian persamaan adalah:

$$\lambda - 2 = 0$$
$$\lambda = 2$$

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

dan $\lambda - 5 = 0$

$$\lambda = 5$$

Jadi nilai eigen yang bersesuai untuk matriks $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ adalah:

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ dan $\lambda_3 = 5$.

Contoh

Dapatkan Nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Nilai eigen A didapatkan dari persamaan:

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 6 & 7 \\ 0 & 8 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)[(\lambda - 6)(\lambda + 1) - 56] = 0$$

$$(\lambda - 1)[\lambda^2 - 5\lambda - 6 - 56] = 0$$

$$(\lambda - 1)[\lambda^2 - 5\lambda - 62] = 0$$

Maka nilai λ adalah:

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 62 = 0$$

Dengan rumus abc didapatkan:

$$\lambda_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4.62}}{2}$$

$$\lambda_2 = 2{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{273}$$

$$\lambda_3 = 2{,}5 - \frac{1}{2}\sqrt{273}$$

Jadi nilai eigen dari matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$ adalah:

$$\lambda_1 = 1 \text{ dan } \lambda = 2{,}5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{273}$$

Contoh .

Dapatkan nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Nilai eigen didapatkan dari persamaan:

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 7 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 7)(\lambda - 3)(\lambda - 3) = 0$$

Maka nilai λ adalah:

$$\lambda - 7 = 0$$

$\lambda = 7$

$\lambda - 3 = 0$

$\lambda = 3$ (2 kali)

Jadi nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda = 3$ dan $\lambda = 7$

Contoh

Dapatkan nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Berdasarkan persamaan $\det[\lambda I - A] = 0$ maka:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 5 \\ 0 & 5 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = 0$$

$(\lambda - 2)\{(\lambda - 2)(\lambda - 4) - 25\} = 0$

$(\lambda - 2)\{\lambda^2 - 6\lambda - 17\} = 0$

Maka nilai λ adalah:

$\lambda - 2 = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\lambda^2 - 6\lambda - 17 = 0$

Dengan rumus abc didapatkan:

$$\lambda_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4.17}}{2}$$

$$\lambda_{2,3} = 3 \pm \frac{1}{2}\sqrt{104}$$

Jadi nilai eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ adalah $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3 + \frac{1}{2}\sqrt{104}$ dan $\lambda_3 = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{104}$

Contoh

Dapatkan nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Dengan menggunakan persamaan det $[\lambda I - A] = 0$ maka:

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 7 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = 0$$

$(\lambda - 7)(\lambda - 3)(\lambda - 3) = 0$

Nilai λ adalah:

$\lambda - 7 = 0$

$\lambda = 7$

$\lambda - 3 = 0$

$\lambda = 3$

$\lambda - 3 = 0$

$\lambda = 3$

Jadi nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah: $\lambda_1 = 7$ dan $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Contoh

Dapatkan Nilai eigen dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Dengan menggunakan persamaan det $\left[\lambda I - A\right] = 0$ maka:

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 3 & \lambda - 3 & 6 \\ 3 & 2 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = 0$$

$(\lambda - 2)[(\lambda - 3)(\lambda - 4) - 12] = 0$

$(\lambda - 2)[\lambda^2 - 7\lambda + 12 - 12] = 0$

$(\lambda - 2)[\lambda^2 - 7\lambda] = 0$

$(\lambda - 2)\lambda(\lambda - 7) = 0$

Maka nilai-nilai λ adalah:

$\lambda - 2 = 0$

$\lambda = 2$

$\lambda = 0$

$\lambda - 7 = 0$

$\lambda = 7$

Jadi nilai-nilai eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ adalah: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$ dan $\lambda_3 = 7$.

6.3 VEKTOR EIGEN

Kita tinjau kembali persamaan $AX = \lambda X$ dimana A adalah matriks bujur sangkar dan X adalah vektor bukan nol yang memenuhi persamaan tersebut. Dalam subbab 7.1 telah dibahas tentang perhitungan nilai eigen dari matriks A(λ), pada subbab ini kita bahas vektor yang memenuhi persamaan tersebut yang disebut vektor eigen(vektor karakteristik) yang sesuai untuk nilai eigennya.

Kita tinjau sebuah matriks bujur sangkar orde 2 x 2 berikut:

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Persamaan $AX = \lambda X$ dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

Persamaan (7.4) dikalikan dengan identitas didapatkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{7.5}$$

Persamaan (7.5) dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Persamaan (7.6) adalah sistem persamaan linier homogen, vektor dalam ruang R^n yang tidak nol didapatkan jika dan hanya jika persamaan tersebut mempunyai solusi non trivial untuk nilai eigen yang sesuai.

Contoh.

Dapatkan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Pada contoh nilai eigen didapatkan $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 3$, vektor eigen didapatkan dengan persamaan:

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (1 - \lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Untuk $\lambda = 2$ maka:

$$-2x_1 + 3x_2 = 0$$
$$2x_1 - x_2 = 0$$

Solusi non trivial sistem persamaan ini adalah:

$$2x_1 = x_2$$

Misalkan $x_1 = r$ maka $x_2 = 2r$

Vektor eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ untuk $\lambda = 2$ adalah:

$X = \begin{bmatrix} r \\ 2r \end{bmatrix}$ dimana r adalah bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 3$ maka:

$$-3x_1 + 3x_2 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 = 0$$

Solusi non trivial sistem persamaan tersebut adalah:

$$x_1 = x_2$$

Misalkan $x_1 = s$ maka vektor eigen untuk $\lambda = 3$ adalah:

$X = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix}$ dimana s adalah senbarang bilangan yang tidak nol.

Contoh

Dapatkan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Pada contoh 7.10 nilai eigen matriks tersebut adalah $\lambda = 4$ dan $\lambda = 5$ maka vektor eigen didapatkan dari persamaan:

$$(4 - \lambda)x_1 + 0 = 0$$
$$3x_1 + (5 - \lambda)x_2 = 0$$

Untuk $\lambda = 4$ didapatkan sistem persamaan linier berbentuk:

$$0 + 0 = 0$$
$$3x_1 + x_2 = 0$$

Solusi non trivialnya adalah $x_1 = -\frac{x_2}{3}$, bila dimisalkan $x_2 = r$ didapatkan vektor eigen matriks A untuk $\lambda = 4$ adalah:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3}r \\ r \end{bmatrix}$$ dengan r bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 5$ maka:

$$(4-5)x_1 + 0 = 0$$
$$3x_1 + (5-5)x_2 = 0$$

Sistem persamaan linier menjadi:

$$-x_1 + 0 = 0$$
$$3x_1 + 0 = 0$$

Tidak ada solusi non trivial dari sistem persamaan linier tersebut, jadi tidak terdapat vektor eigen dari matriks A untuk $\lambda = 5$.

Contoh

Dapatkan vektor eigen dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Nilai eigen matriks A didapatkan dari persamaan:

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 2 & 0 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-(\lambda - 1)\lambda - 6 = 0$$

$$-\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(-\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

Nilai eigen matriks A adalah:

$-\lambda + 2 = 0$, maka $\lambda_1 = 2$

$\lambda - 3 = 0$, maka $\lambda_2 = 3$

Vektor eigen didapatkan dengan persamaan:

$$\begin{aligned}(1-\lambda)x_1 + 3x_2 &= 0\\ 2x_1 - \lambda x_2 &= 0\end{aligned}$$

Untuk $\lambda = 2$ maka:

$$\begin{aligned}-x_1 + 3x_2 &= 0\\ 2x_1 - 2x_2 &= 0\end{aligned}$$

Solusi non trivial sistem persamaan linier tersebut adalah:

$$3x_2 = x_1$$

Misalkan $x_1 = r$ maka $x_2 = 3r$.

Jadi vektor eigen matriks A untuk $\lambda = 2$ adalah:

$X = \begin{bmatrix} r \\ 3r \end{bmatrix}$ dengan r bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 3$

Vektor eigen didapatkan dari sistem persamaan linier:

$$\begin{aligned}-2x_1 + 3x_2 &= 0\\ 2x_1 - 3x_2 &= 0\end{aligned}$$

Solusi non trivial adalah:

$2x_1 = 3x_2$, maka $x_2 = \frac{2}{3}x_1$

Misalkan $x_1 = r$ vektor eigen matriks A yang sesuai dengan $\lambda = 3$ adalah:

$X = \begin{bmatrix} r \\ \frac{2}{3}r \end{bmatrix}$ dengan r bilangan sembarang yang tidak nol.

Contoh

Dapatkan vektor eigen dari A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Nilai eigen matriks A didapatkan dari persamaan det $[\lambda I - A] = 0$

$$\det\begin{bmatrix} (\lambda - 3) & 2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda(\lambda - 3) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$\lambda - 1 = 0$ maka $\lambda_1 = 1$

$\lambda - 2 = 0$ maka $\lambda_2 = 2$

Vektor eigen didapatkan dari persamaan:

$$(3 - \lambda)x_1 + 2x_2 = 0$$
$$-x_1 + (0 - \lambda)x_2 = 0$$

Untuk $\lambda = 1$ maka:

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$
$$-x_1 - x_2 = 0$$

Solusi non trivial persamaan tersebut adalah:

$x_1 = -x_2$, jika $x_1 = r$ maka $x_2 = -r$

Vektor eigen yang sesuai dengan $\lambda = 1$ adalah:

$X = \begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}$ dengan r bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 2$ maka:

$$x_1 + 2x_2 = 0$$
$$-x_1 - 2x_2 = 0$$

Solusi non trivial sistem persamaan linier tersebut adalah;

$$x_1 = -2x_2$$

Misalkan $x_1 = r$ maka $x_2 = -\frac{1}{2}r$

Jadi vektor eigen yang sesuai dengan $\lambda = 2$ adalah:

$$X = \begin{bmatrix} r \\ -\frac{1}{r} \end{bmatrix}$$

Contoh

Dapatkan vektor eigen dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Pada contoh 7.16 diketahui nilai eigen matriks A adalah: $\lambda = 2, \lambda = 0$ dan $\lambda = 7$.

Vektor eigen ditentukan dari persamaan:

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 \\ 3 & (3-\lambda) & 6 \\ 3 & 2 & (4-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 2$ maka:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi non trivial didapatkan dari:

$$[3x_1 + x_2 + 6x_3] - [3x_1 + 2x_2 + 2x_3] = 0$$

$$-x_2 + 4x_3 = 0$$

$$x_2 = 4x_3$$

Maka

$$3x_1 + 4x_3 + 6x_3 = 0$$

$$3x_1 + 10x_3 = 0$$

$$3x_1 = -10x_3$$

$$x_1 = \frac{-10}{3}x_3$$

Jadi vektor eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ untuk $\lambda = 2$ adalah:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-10}{3}x_3 \\ 4x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_3 = r$ maka:

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-10}{3}r \\ 4r \\ r \end{bmatrix}$$ dengan r adalah bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 0$

Vektor eigen ditentukan dari persamaan:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$2x_1 + 0 + 0 = 0$$
$$3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

Solusi sistem persamaan linier adalah:

$$2x_1 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$0 + 3x_2 + 6x_3 = 0$$

$$x_2 = -2x_3$$

Vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ untuk $\lambda = 0$ adalah:

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_3 = r$ maka:

$X = \begin{bmatrix} 0 \\ -2r \\ r \end{bmatrix}$ dengan r bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 7$

Vektor eigen didapatkan dari persamaan:

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$\begin{aligned} -5x_1 + 0 + 0 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi sistem persamaan linier adalah:

$$-5x_1 = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$-4x_2 + 6x_3 = 0$$

$$x_2 = \frac{3}{2}x_3$$

Vektor eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ untuk $\lambda = 7$ adalah:

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_3 = r$ maka:

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}r \\ r \end{bmatrix}$$ dengan r sembarang bilangan yang tidak nol.

Contoh

Dapatkan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Pada contoh 7. 14 diketahui nilai eigen matriks tersebut yang merupakan bilangan bulat adalah $\lambda = 2$, vektor eigennya didapatkan dari persamaan:

$$\begin{bmatrix} (2-2) & 0 & 0 \\ 0 & (2-2) & 5 \\ 0 & 5 & (4-2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$0 + 0 + 0 = 0$$
$$0 + 0 + 5x_3 = 0$$
$$0 + 5x_2 + 2x_3 = 0$$

Solusi non trivial sistem persamaan liniernya adalah:

$$5x_2 = -2x_3$$

$$x_2 = \frac{-2}{5}x_3$$

$x_1 = 0$

Vektor eigen matriks A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ yang sesuai dengan nilai eigen 2 adalah:

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-2}{5}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_3 = s$ maka:

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5}s \\ s \end{bmatrix}$$ dengan s adalah bilangan sembarang yang tidak nol.

Contoh

Dapatkan vektor eigen dari A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Nilai eigen didapatkan dengan persamaan:

$$\det\begin{bmatrix} (\lambda-1) & 0 & 2 \\ 2 & (\lambda-1) & 0 \\ 3 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda-1)\left[(\lambda-1)\lambda\right] + 2\left[0 - 3(\lambda-1)\right] = 0$$

$$(\lambda-1)\left[\lambda^2 - \lambda - 6\right] = 0$$

Nilai eigen matriksnya adalah:

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = -2$$

$\lambda - 3 = 0$

$\lambda = 3$

Vektor eigen didapatkan berdasar persamaan:

$$\begin{bmatrix} (1-\lambda) & 0 & 2 \\ 2 & (1-\lambda) & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

Dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 0 + 0 &= 0 \\ 3x_1 + 0 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi sistem persamaan liniernya adalah:

$3x_1 - x_3 = 0$

$x_3 = 3x_1$

$x_2 = 0$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ 3x_1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = t$

Vektor eigennya adalah:

$X = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 3t \end{bmatrix}$ dengan t bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = -2$

Sistem persamaan liniernya adalah:

$$3x_1 + 0 + 2x_3 = 0$$
$$2x_1 + 3x_2 + 0 = 0$$
$$3x_1 + 0 + 2x_3 = 0$$

Solusi non trivial sistem persamaan liniernya adalah:

$$3x_1 + 2x_3 = 0$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 = 0$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}x_1$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{2}{3}x_1 \\ -\frac{3}{2}x_1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = p$ maka vektor eigennya adalah:

$$X = \begin{bmatrix} p \\ -\frac{2}{3}p \\ -\frac{3}{2}p \end{bmatrix}$$ dengan p bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 3$

Sistem persamaan liniernya adalah:

$$-2x_1 + 0 + 2x_3 = 0$$
$$2x_1 - 2x_2 + 0 = 0$$
$$3x_1 + 0 - 3x_3 = 0$$

Solusi non trivial sistem persamaan liniernya adalah;

$$2x_1 = 2x_3$$

$$x_1 = x_3$$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = q$ maka vektor eigennya adalah;

$$X = \begin{bmatrix} q \\ q \\ q \end{bmatrix}$$ dengan q bilangan sembarang yang tidak nol.

Contoh

Dapatkan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Dari penyelesaian contoh 7.12 nilai eigen yang merupakan bilangan bulat adalah 1, maka vektor eigennya didapatkan dari persamaan:

$$\begin{bmatrix} (1-1) & 0 & 0 \\ 3 & (6-1) & 7 \\ 0 & 8 & (-1-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dalam bentuk sistem persamaan linier adalah:

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 0 + 8x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi non trivialnya adalah:

$$8x_2 = 2x_3$$

$$x_2 = \frac{1}{4} x_3$$

$$3x_1 + 5x_2 + 28x_2 = 0$$

$$3x_1 = -33x_2$$

$$x_1 = 11x_2$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} 11x_2 \\ x_2 \\ 4x_2 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_2 = a$ maka vektor eigennya adalah:

$$X = \begin{bmatrix} 11a \\ a \\ 4a \end{bmatrix}$$

Contoh

Dapatkan vektor eigen dari A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Nilai eigen matriks tersebut didapatkan dari persamaan:

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} (\lambda - 2) & 0 & 0 \\ 2 & (\lambda - 1) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2) \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

Nilai eigennya adalah:

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = 2$$

Vektor eigen didapatkan dari persamaan:

$$\begin{bmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 \\ 2 & (1-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (2-\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

Sistem persamaan liniernya dituliskan:

$$\begin{aligned} x_1 + 0 + 0 &= 0 \\ 2x_1 + 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Tidak ada solusi non trivial dari sistem persamaan linier tersebut, maka vektor eigen tidak terdefinisikan.

Untuk $\lambda = 2$

Sitem persamaan liniernya adalah:

$$\begin{aligned} 0 + 0 + 0 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi non trivial sistem persamaan liniernya adalah:

$$2x_1 = x_2$$

$$x_3 = 0$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = t$ maka vektor eigennya menjadi:

$X = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{bmatrix}$ dengan t bilangan sembarang yang tidak nol.

Contoh

Dapatkan vektor eigen dari matriks A = $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Nilai eigen matriks didapatkan dari persamaan:

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} (\lambda-3) & -2 & 0 \\ -2 & (\lambda-3) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-5) \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda-3)[(\lambda-3)(\lambda-5)] + 2[-2(\lambda-5)] = 0$$

$$(\lambda-5)[(\lambda-3)^2 - 4] = 0$$

$$(\lambda-5)[\lambda^2 - 6\lambda + 5] = 0$$

$$(\lambda-5)^2(\lambda-1) = 0$$

Nilai eigen matriks adalah:

$$\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda = 5$$

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

Vektor eigen didapatkan dari persamaan:

$$\begin{bmatrix} (3-\lambda) & -2 & 0 \\ -2 & (3-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (5-\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

Dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 0 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi non trivialnya adalah:

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

$$x_3 = 0$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = t$ maka vektor eigennya adalah:

$X = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$ dengan t bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 5$

Sistem persamaan liniernya adalah:

$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 + 0 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 0 &= 0 \\ 0 + 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi non trivialnya adalah:

$$2x_1 = -2x_2$$

$$x_1 = -x_2$$

$$x_3 = 0$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = r$ maka vektor eigenya adalah:

$X = \begin{bmatrix} r \\ -r \\ 0 \end{bmatrix}$ dengan r bilangan sembarang yang tidak nol.

Contoh

Dapatkan vektor eigen dari A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

penyelesaian

Nilai eigen dari matriks didapatkan dari persamaan

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} (\lambda-4) & 0 & 1 \\ -2 & (\lambda-1) & 0 \\ -2 & 0 & (\lambda-1) \end{bmatrix} = 0$$

$$(\lambda-4)\left[(\lambda-1)^2\right] + 2(\lambda-1) = 0$$

$$(\lambda-1)[(\lambda-1)(\lambda-4)+2] = 0$$

$$(\lambda-1)\left[\lambda^2 - 5\lambda + 6\right] = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

Nilai eigen matriks tersebut adalah:

$$\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = 1$$

$$\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda = 2$$

$$\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda = 3$$

Vektor eigen didapatkan dari persamaan:

$$\begin{bmatrix} (4-\lambda) & 0 & 1 \\ -2 & (1-\lambda) & 0 \\ -2 & 0 & (1-\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Untuk $\lambda = 1$

Dalam bentuk sistem persamaan linier dituliskan:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 0 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 0 + 0 &= 0 \\ -2x_1 + 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi non trivialnya adalah:

$$3x_1 = -x_3$$

$$x_2 = 0$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ -3x_1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = p$ maka vektor eigenya adalah:

$$X = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ -3p \end{bmatrix}$$ dengan p adalah bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 2$

Sistem persamaan linier yang sesuai adalah:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 0 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + 0 &= 0 \\ -2x_1 + 0 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi non trivialnya adalah:

$$2x_1 = -x_3$$

$$-2x_1 = x_2$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ -2x_1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = s$ maka vektor eigennya adalah:

$$X = \begin{bmatrix} s \\ -2s \\ -2s \end{bmatrix}$$ dengan s bilangan sembarang yang tidak nol.

Untuk $\lambda = 3$

Sistem persamaan liniernya adalah:

$$\begin{aligned} x_1 + 0 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 0 &= 0 \\ -2x_1 + 0 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solusi trivialnya adalah:

$$x_1 + x_3 = 0$$

$$x_1 = -x_3$$

$$-2x_1 - 2x_2 = 0$$

$$x_2 = -x_1$$

Vektor eigen yang sesuai adalah:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

Misalkan $x_1 = t$ maka

$$X = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -t \end{bmatrix}$$ dengan t bilangan sembarang yang tidak nol.

BAB VI

TRANSFORMASI LINIER

Dalam bagian ini akan dibahas masalah penelaahan fungsi berbentuk w = F(x), dimana peubah bebas x adalah suatu vector dalam R^n dan peubah tak-bebas w adalah suatu vector dalam R^m. fungsi-fungsi seperti itu dinamakan TRANSFORMASI LINIER. Transformsi linier merupakan dasar dalam telaah aljabar linier dan mempunyai banyak penerapan penting dalam fisika, teknik, ilmu-ilmu social dan berbagai cabang matematika.

6.1. TRANSFORMASI LINIER DARI R^n KE R^m

Jika daerah asal suatu fungsi f adalah R^n dan daerah kawannya adalah R^m (m dan n mungkin sama), maka f disebut suatu peta atau transformasi dari R^n ke R^m dan dikatakan bahwa f memetakan R^n ke R^m.

Untuk mengilustrasikan suatu cara penting dimana transformasi bisa muncul, anggap f_1, f_2, …, f_n adalah fungsi-fungsi bernilai real dari n peubah real:

$$w_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$w_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\ldots$$

$$w_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

m persamaan tersebut menempatkan suatu titik (w_1, w_2, …, w_m) dalam R^m ke setiap titik (x_1, x_2, …, x_n) dalam R^n, yang mendefinisikan suatu transformasi dari R^n ke R^m, yang dapat dinyatakan sebagai:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$$

dimana T adalah transformasi yang terbentuk.

<u>Contoh:</u>

Diketahui transformasi T:$R^2 \rightarrow R^3$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$w_1 = x_1 + x_2$$

$$w_2 = 3x_1x_2$$

$$w_3 = x_1^2 - x_2^2$$

maka bayangan titik (x_1,x_2) adalah:

$$T(x_1,x_2) = (x_1 + x_2,\ 3x_1x_2,\ x_1^2 - x_2^2)$$

Jika diandaikan x_1=2 dan x_2=-1, maka T(2,-1) = (1, -6, 3)

Transformasi Linear dari R^n ke R^m

Untuk transformasi linear, secara umum T:$R^n \rightarrow R^m$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$w_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n$$

$$w_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n$$

$$\ldots$$

$$w_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n$$

atau dalam notasi matriks:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

atau dapat diringkas menjadi:

$$W = A.x$$

dimana A adalah matriks standar untuk transformasi linear T

Contoh:

Transformasi linear T:$R^4 \rightarrow R^3$ didefinisikan oleh:

$$w_1 = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3$$

$$w_2 = 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

$$w_3 = 4x_2 + x_3 + 4x_4$$

Ketiga persamaan tersebut dapat dinotasikan sebagai:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Sehingga matriks standar untuk transformasi tersebut adalah: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Bayangan titik (x_1, x_2, x_3, x_4) dapat dihitung dari ketiga persamaan awal atau dari notasi matriksnya.

Jika (x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 2, 0) maka hasil transformasinya adalah:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

OPERATOR-OPERATOR TRANSFORMASI PADA R^2 dan R^3

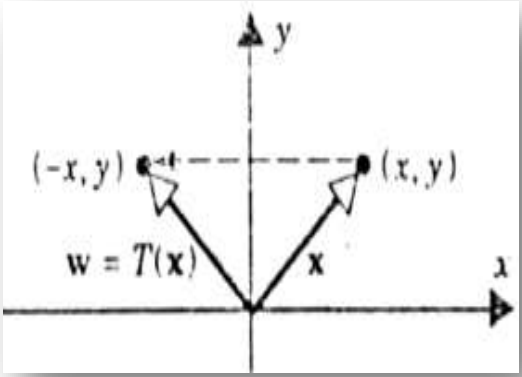
Operasi-operasi linier yang paling penting dalam R^2 dan R^3 diantaranya adalah operasi-operasi yang menghasilkan 4 operator, yaitu :

1. Refleksi (Pencerminan)
2. Proyeksi
3. Rotasi (Perputaran)
4. Dilatasi (Penskalaan)

Refleksi (Pencerminan)

<u>Refleksi di R^2 </u>terbagi menjadi 3 yaitu:

- Refleksi terhadap sumbu y



Titik awal: (x,y)

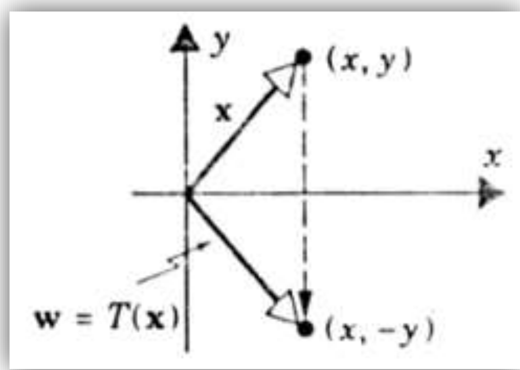
Titik akhir: (-x,y)

Persamaan: $w_1 = -x$

$w_2 = y$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Refleksi terhadap sumbu x



Titik awal: (x,y)

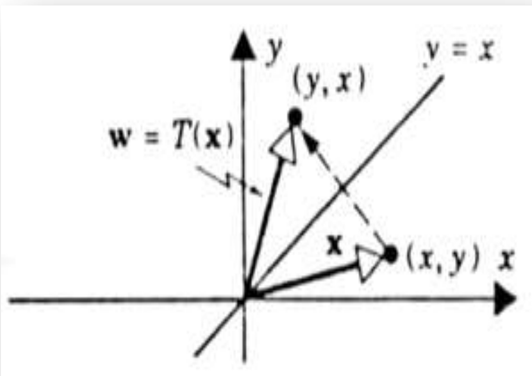
Titik akhir: (x,-y)

Persamaan: $w_1 = x$

$w_2 = -y$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Refleksi terhadap garis x = y



Titik awal: (x,y)

Titik akhir: (y,x)

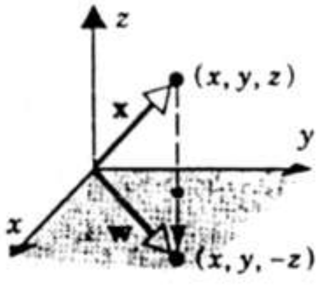
Persamaan: $w_1 = y$

$w_2 = x$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Refleksi di R^3 terbagi menjadi 3 yaitu:

- Refleksi terhadap bidang xy



Titik awal: (x,y,z)

Titik akhir: $(x,y,-z)$

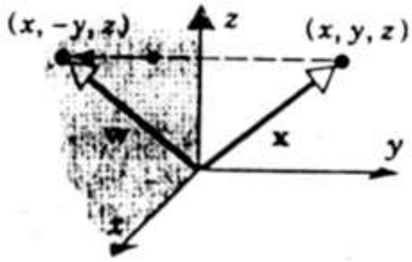
Persamaan: $w_1 = x$

$w_2 = y$

$w_2 = -z$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Refleksi terhadap bidang xz



Titik awal: (x,y,z)

Titik akhir: $(x,-y,z)$

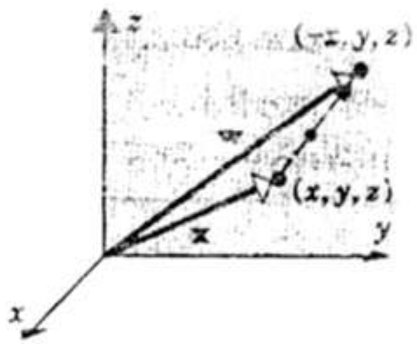
Persamaan: $w_1 = x$

$w_2 = -y$

$w_2 = z$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Refleksi terhadap bidang yz



Titik awal: (x,y,z)

Titik akhir: $(x,y,-z)$

Persamaan: $w_1 = -x$

$w_2 = y$

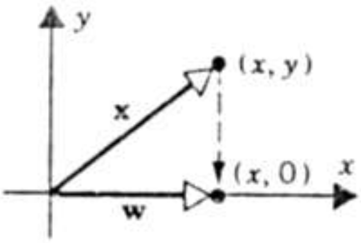
$w_2 = z$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proyeksi

Proyeksi di R^2 terbagi menjadi 2 yaitu:

- Proyeksi terhadap sumbu x



Titik awal: (x,y)

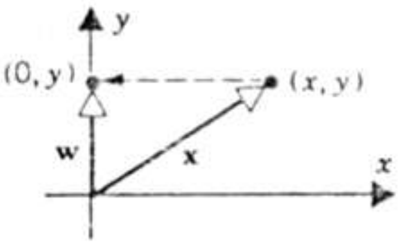
Titik akhir: $(x,0)$

Persamaan: $w_1 = x$

$w_2 = 0$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Proyeksi terhadap sumbu y



Titik awal: (x,y)

Titik akhir: $(0,y)$

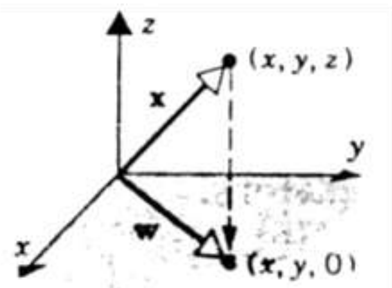
Persamaan: $w_1 = 0$

$w_2 = y$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proyeksi ortogonal di R^3 terbagi menjadi 3 yaitu:

- Proyeksi ortogonal terhadap bidang xy



Titik awal: (x,y,z)

Titik akhir: $(x,y,0)$

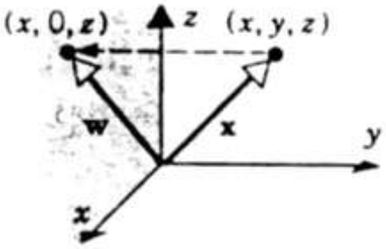
Persamaan: $w_1 = x$

$w_2 = y$

$w_2 = 0$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Proyeksi ortogonal terhadap bidang xz



Titik awal: (x,y,z)

Titik akhir: $(x,0,z)$

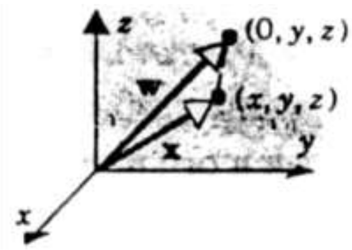
Persamaan: $w_1 = x$

$w_2 = 0$

$w_2 = z$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Proyeksi ortogonal terhadap bidang yz



Titik awal: (x,y,z)

Titik akhir: $(0,y,z)$

Persamaan: $w_1 = 0$

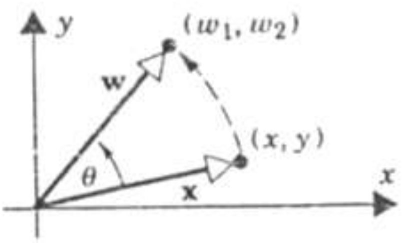
$w_2 = y$

$w_2 = z$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rotasi (Perputaran)

<u>Rotasi dengan sudut θ di R^2</u> adalah:



Titik awal: (x,y)

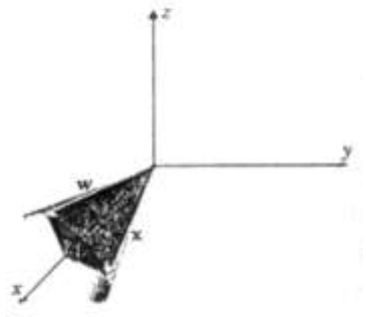
Titik akhir: (w_1,w_2)

Matriks standar: $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Searah: $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Rotasi di R^3 terbagi menjadi 3 yaitu:

- Rotasi berlawanan dengan jarum jam terhadap sumbu x positif dengan sudut θ

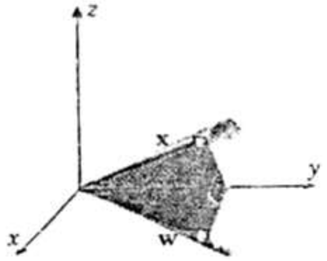


Titik awal: (x,y)

Titik akhir: (w_1,w_2,w_3)

Matriks standar: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

- Rotasi berlawanan dengan jarum jam terhadap sumbu y positif dengan sudut θ

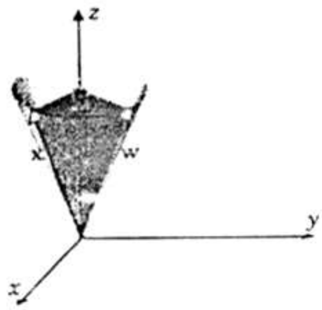


Titik awal: (x,y)

Titik akhir: (w_1,w_2,w_3)

Matriks standar: $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

- Rotasi berlawanan dengan jarum jam terhadap sumbu z positif dengan sudut θ



Titik awal: (x,y)

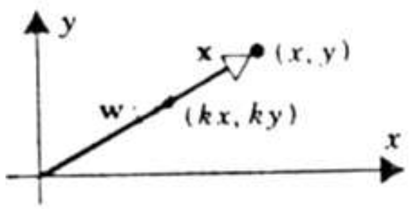
Titik akhir: (w_1,w_2,w_3)

Matriks standar: $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dilatasi (Penskalaan)

Dilatasi di R^2 terbagi menjadi 2 yaitu:

- Penyempitan dengan faktor k pada R^2 $(0 \le k \le 1)$



Titik awal: (x,y)

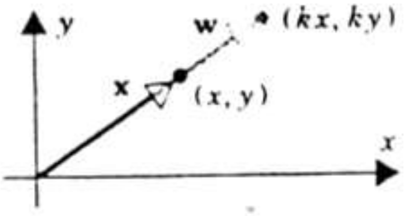
Titik akhir: (kx,ky)

Persamaan: $w_1 = kx$

$w_2 = ky$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

- Pelebaran dengan faktor k pada R^2 ($k \geq 1$)



Titik awal: (x,y)

Titik akhir: (kx,ky)

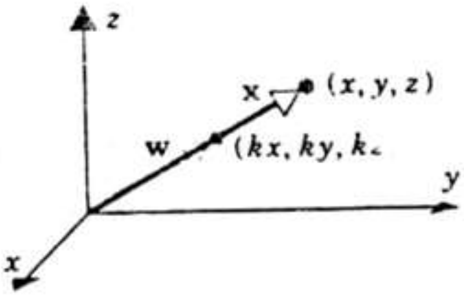
Persamaan: $w_1 = kx$

$w_2 = ky$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

<u>Dilatasi di R^3</u> terbagi menjadi 2 yaitu:

- Penyempitan dengan faktor k pada R^3 ($0 \leq k \leq 1$)



Titik awal: (x,y,z)

Titik akhir: (kx,ky,kz)

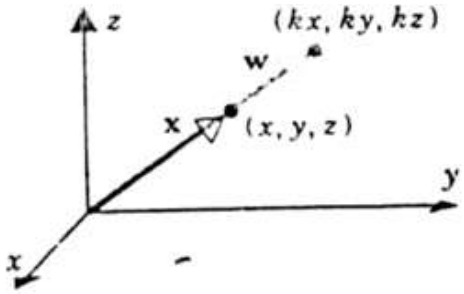
Persamaan: $w_1 = kx$

$w_2 = ky$

$w_3 = kz$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

- Pelebaran dengan faktor k pada R^3 ($k \geq 1$)



Titik awal: (x,y,z)

Titik akhir: (kx,ky,kz)

Persamaan: $w_1 = kx$

$w_2 = ky$

$w_3 = kz$

Matriks standar: $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$

Komposisi Transformasi Linear

Komposisi transformasi linear merupakan perpaduan dua atau lebih transformasi linear.

$$T_1 : R^{n_1} \rightarrow R^{n_2} , T_2 : R^{n_2} \rightarrow R^{n_3} , \ldots, T_z : R^{n_{m-1}} \rightarrow R^{n_m}$$

Dituliskan sebagai:

$$(T_z \text{ o } \ldots \text{ o } T_2 \text{ o } T_1)(x) = T_z(\ldots(T_2(T_1(x))\ldots)$$

LATIHAN-LATIHAN SOAL

1. Bagaimana matriks standar untuk transformasi linier $T:R^3 \rightarrow R^3$ yang diberikan oleh:

   $$w_1 = 3x_1 + 5x_2 - x_3$$

   $$w_2 = 4x_1 - x_2 + x_3$$

   $$w_3 = 3x_1 + 2x_2 - x_3$$

   dan hitung T(-1,2,4)!
2. Cari matriks standar untuk transformasi linier $T:R^2 \rightarrow R^2$ dari (0,-3) yang direfleksikan terhadap garis y=x! Kemudian tentukan hasil transformasinya!
3. Cari matriks standar untuk transformasi linier $T:R^2 \rightarrow R^2$ dari (0,-3) yang diproyeksikan terhadap sumbu x! Kemudian tentukan hasil transformasinya!
4. Cari matriks standar untuk transformasi linier $T:R^2 \rightarrow R^2$ dari (1,-3) yang dirotasikan terhadap sebesar 30^0! Kemudian tentukan hasil transformasinya!
5. Cari matriks standar untuk transformasi linier $T:R^3 \rightarrow R^3$ dari (0,-3,1) yang dirotasikan searah jarum jam sebesar 60^0! Kemudian tentukan hasil transformasinya!
6. Cari matriks standar untuk transformasi linier $T:R^3 \rightarrow R^3$ dari (0,-3,1) yang didilatasikan sebesar 3 kali! Kemudian tentukan hasil transformasinya!
7. Cari matriks standar dan bayangan dari vektor (-2,1) yang dirotasikan searah jarum jam dengan sudut $3\pi/4$ kemudian diproyeksikan secara ortogonal terhadap sumbu y, kemudian dilebarkan dengan faktor k=2! Kemudian cari invers dari matriks standar tersebut!
8. Cari matriks standar dan bayangan dari vektor (-2,1,0) yang direfleksikan terhadap bidang xz, kemudian dirotasikan berlawanan jarum jam terhadap sumbu z dengan sudut $5\pi/4$, kemudian disempitkan dengan faktor k=3! Kemudian cari determinan dari matriks standar dan norm dari vektor bayangannya!

Daftar Pustaka

[1] Anton, Howard, Dasar-Dasar Aljabar Linier, edisi 7 jilid 1, 2000.