CATATAN KULIAH

ALJABAR LINEAR

MUSTHOFA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FMIPA UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2011

SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Tujuan : Menyelesaikan sistem persamaan linear.

OPERASI BARIS ELEMENTER (OBE)

Misalkan kita akan menyelesaikan suatu sistem persamaan linear sebagai berikut :

$$x + 2y = 5$$
$$2x + y = 4$$

Salah satu cara untuk menyelesaikan persamaan tersebut adalah dengan :

1) Mengalikan persamaan pertama dengan 2, kemudian mengurangkan dengan baris kedua, diperoleh :

$$\begin{array}{r} 2x + 4y = 10 \\ \underline{2x + y = 4} \quad - \\ 3y = 6 \\ y = 2 \end{array}$$

2) Mengalikan baris kedua dengan 2, kemudian mengurangkan dengan persamaan pertama, diperoleh :

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = 8 \\ \underline{x + 2y = 5} \quad - \\ 3y = 3 \\ x = 1 \end{array}$$

Diperoleh solusi $x = 1$; $y = 2$.

Catatan :
Pada proses penyelesaian di atas, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Mengalikan suatu persamaan(baris) dengan suatu bilangan tak nol
2. Menukar baris
3. Menjumlahkan atau mengurangkan suatu persamaan dengan persamaan yang lain.

Langkah-langkah ini dinamakan **operasi baris elementer** (**OBE**)

MATRIKS AUGMENTASI

Jika diperhatikan dengan seksama, maka untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear, cukup diperhatikan koefisien dari masing-masing variable. Oleh karena itu untuk menyelesaikan sistem persamaan linear seperti di atas, dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Bentuk seperti ini dinamakan **matriks augmentasi** (*augmented matrix form*).

ELIMINASI GAUSS

Misal akan dicari penyelesaian dari sistem persamaan linear sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 8 \\ 2x + y - z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 10 \end{aligned}$$

Matriks augmentasi dari sistem persamaan linear di atas adalah :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

Selanjutnya, dengan melakukan OBE, diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -4 & -2 & -14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ 3R_3 - 4R_2 \rightarrow R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right] \Rightarrow \text{disebut } \textbf{bentuk eselon baris}.$$

Setelah matriks augmentasi menjadi matriks dalam bentuk eselon baris, maka kita dapat memperoleh solusi sistem persamaan linear tersebut dengan melakukan substitusi dimulai dari baris terakhir. Pada sistem persamaan linear di atas :

$6z = 18 \Rightarrow z = 3$

$z = 1 \Rightarrow y = 2$

$y = 2 \Rightarrow x = 1$

Akhirnya diperoleh solusi x =1; y =2 dan z = 3.

Definisi: Elemen taknol pertama dari setiap baris pada matrisk dinamakan **elemen pivot**. Suatu matriks dikatakan dalam **bentuk eselon baris** jika memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. Semua bilangan pada kolom di bawah elemen pivot adalah nol.
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bagian bawah dari matriks.

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear di atas dengan metode eliminasi Gauss, langkah –langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Menentukan matriks augmentasi
2. Melakukan OBE untuk memperoleh bentuk eselon baris .
3. Menyelesaikan sistem persamaan linear dengan substitusi

LATIHAN :

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan metode eliminasi gauss:

1. $$\begin{aligned} x + 2y + z + 2w &= 9 \\ 2x + y - z + w &= 3 \\ 3x + 2y + z - w &= 5 \\ 2x - 3y + 2z + 3w &= 9 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z + w &= 3 \\ 2x + 5y - z + 3w &= 8 \\ 3x + 2y + z - 2w &= 0 \\ 2x - y + z + 2w &= 1 \end{aligned}$$

ELIMINASI GAUSS-JORDAN

Metode ini hampir sama dengan metode eliminasi gauss. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan metode ini, langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut :

1. Menentukan matriks augmentasi
2. Melakukan OBE sehingga matriks augmentasinya menjadi **bentuk eselon baris tereduksi.**

Suatu matriks dikatakan dalam bentuk eselon baris tereduksi jika :

1. Elemen pivot = 1
2. Semua bilangan pada kolom di bawah elemen pivot adalah nol.
3. Jika terdapat baris yang seluruhnya nol, maka semua baris seperti itu dikelompokkan bersama-sama di bagian bawah dari matriks.
4. Setiap kolom yang mempunyai elemen pivot mempunyai nol ditempat lain

Misal akan diselesaikan sistem persamaan linear sebagai berikut :

$$x + 2y + z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$3x + 2y + z = 10$$

Langkah –langkah penyelesaian dengan metode eliminasi gauss-jordan adalah sebagai berikut :

1. **Matriks augmentasi** dari sistem persamaan linear di atas adalah :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right]$$

2. Menerapkan OBE sehingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 3R_1 \to R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & -4 & -2 & -14 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -\tfrac{1}{3}R_2 \to R_2 \\ 3R_3 - 4R_2 \to R_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right] \tfrac{1}{6}R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3 \rightarrow R_2 \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 - R_3 \\ R_2 - R_3 \rightarrow R_2 \\ \end{array}$$

Matriks terakhir ini dikatakan dalam **bentuk eselon baris tereduksi**.

Jadi penyelesaian sistem persamaan linear di atas adalah :

z = 3, y = 2, dan $x + 2y$ = 5,sehingga x = 1.

LATIHAN

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan eliminasi gauss-jordan :

1. $$\begin{aligned} x + y + 2z &= 8 \\ -x - 2y + 3z &= 1 \\ 3x - 7y + 4z &= 10 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 5 \\ -2y + 7z &= 7 \\ 3x + 4y + 5z &= 8 \end{aligned}$$

KONSISTENSI SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Misal akan diselesaikan suatu sistem persamaan linear :

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 2x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

Dengan menerapkan eliminasi gauss, diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right] R_2 - 2R_1 \rightarrow R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

Menurut hasil di atas, diperoleh persamaan 0 · x + 0· y = -8. Dari sini, tidak mungkin ada nilai x dan y yang memenuhi persamaan tersebut. Oleh karena itu sistem persamaan linear di atas dikatakan **tidak konsisten**.

Definisi : *suatu sistem persamaan linear yang tidak memiliki solusi dinamakan tidak konsisten.*

Selanjutnya perhatikan sistem persamaan linear sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ 2x - 6y + 3z &= 4 \\ -x + 3y - z &= -1 \end{aligned}$$

Dengan menerapkan eliminasi gauss, diperoleh bentuk eselon baris sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -6 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 + R_1 \to R_3 \end{array} \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Berdasarkan hasil di atas, diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= 1 \\ z &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \; x - 3y = -1 .$$

Akibatnya sistem persamaan linear tersebut memiliki banyak solusi,

misal (-1,0,2), (0,1/3,2) , (2,1,2), dll.

LATIHAN

Selidiki diantara sistem persamaan linear berikut, manakah yang tidak konsisten dan manakah yang memiliki banyak solusi.

1. $\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + 2y + 4z &= 5 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ x + 2y + 2z &= 1 \\ x + 4y + 2z &= 2 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} x + 2z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$

4. $$\begin{aligned} x - y - 2z &= 3 \\ x + 2y - z &= 0 \\ 2x - y + z &= 5 \\ x - y - z &= 3 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x - y + z &= 1 \\ 2x + 2z &= 4 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil latihan di atas, apakah ciri-ciri suatu sistem persamaan linear **tidak konsisten** dan apakah ciri-ciri suatu sistem persamaan linear memiliki **banyak solusi**?

MATRIKS

Tujuan : Memahami operasi matriks

DEFINISI : Matriks adalah susunan segiempat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan tersebut dinamakan entri.

Jika ***A*** adalah suatu matriks, maka entri pada baris ke-i dan kolom ke-j dapat dinyatakan sebagai a_{ij}.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Selanjutnya ukuran suatu matriks dinyatakan sebagai banyaknya baris dan kolom, sebagai contoh matriks ***A*** di atas berukuran 2×3.

MATRIKS PERSEGI

Suatu matriks yang memiliki kolom dan baris yang banyaknya sama dinamakan **matriks persegi**.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

MATRIKS DIAGONAL

Matriks ***D*** dikatakan matriks diagonal jika matriks tersebut merupakan matriks persegi dengan entri-entri $d_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$.

Contoh :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

MATRIKS SATUAN /IDENTITAS

Matriks ***I*** dikatakan matriks satuan jika matriks ***I*** merupakan matriks diagonal dengan entri-entri $\boldsymbol{I_{ii}} = 1$ untuk setiap i (entri diagonalnya = 1).

Contoh :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OPERASI PADA MATRIKS

1. **Penjumlahan**

   Dua buah matriks dapat dijumlahkan jika mempunyai ukuran yang sama

   Penjumlahan dua matriks didefinisikan sebagai berikut :

   Jika $A = \left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$ dan $A = \left[b_{ij}\right]_{2\times 3}$, maka $A + B = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{2\times 3}$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

diperoleh $A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 & 3+1 \\ 4+2 & 5+0 & 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 6 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

2. **Perkalian Matriks**

   Untuk mendefinisikan perkalian matriks, terlebih dahulu diberikan sebuah contoh sebagai berikut :

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(4)+3(0) & 1(2)+2(5)+3(1) \\ 4(1)+5(4)+6(0) & 4(2)+5(5)+6(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 24 & 39 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh di atas, dapat dilihat bahwa dalam menghitung perkalian dua matriks, kita mengalikan elemen-elemen pada setiap **baris** dengan elemen-elemen pada setiap **kolom.**

Jika $A = \left[a_{ij} \right]_{m\times r}$ dan $A = \left[b_{ij} \right]_{r\times m}$, maka $AB = \left[a_{kh} \right]_{m\times n}$ dengan

$$a_{ik} = \sum_{r} a_{ir} b_{rk}$$

3. **Perkalian scalar**

Jika ***A*** adalah suatu matriks dan *k* adalah scalar, maka ***kA*** adalah suatu matriks yang entri-entrinya merupakan hasil kali entri matriks ***A*** dengan *k*.

Contoh :

k =2 dan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

4. **Transpose matriks**

Jika A matriks berukuran m × n, maka transpose matriks A, dinotasikan dengan A^t, merupakan matriks berukuran n × m dengan baris ke-i nya merupakan kolom ke-i dari A.

Jadi $A^t = \left[a_{ji} \right], a_{ji} \in A$.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

LATIHAN :

1. $\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$, tentukan nilai *a*,*b*, *c* dan *d*.

2. Jika diketahui matriks-matriks sebagai berikut :

   $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

   Hitung : *AB*, *AC*, *BC*, *CA*.

SIFAT-SIFAT OPERASI MATRIKS

Berikut beberapa sifat yang berlaku pada operasi matriks:

1. *A*+ *B* = *B* + *A* (*komutatif terhadap penjumlahan*)
2. *A* + (*B* + *C*) = (*A*+*B*) + *C* (*assosiatif terhadap penjumlahan*)
3. *A*(*BC*) = (*AB*) *C* (*assosiatif terhadap perkalian*)
4. *A*(*B*+*C*) = *AB* + *AC* (*distributif*)

Selanjutnya akan dibuktikan untuk sifat (3) sebagai berikut :

Misal $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots. a_{1r} \\ & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mr} \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots. b_{1k} \\ & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} \ldots b_{rk} \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots. c_{1n} \\ & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} \ldots c_{kn} \end{bmatrix}$.

$$BC = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots. b_{1k} \\ & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} \ldots b_{rk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \ldots. c_{1n} \\ & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} \ldots c_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum b_{1k} c_{k1} & \sum b_{1k} c_{k2} \ldots\ldots \sum b_{1k} c_{kn} \\ & \vdots \\ \sum b_{rk} c_{k1} & \sum b_{rk} c_{k2} \ldots\ldots \sum b_{rk} c_{kn} \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots. a_{1r} \\ & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum b_{1k} c_{k1} & \sum b_{1k} c_{k2} \ldots\ldots \sum b_{1k} c_{kn} \\ & \vdots \\ \sum b_{rk} c_{k1} & \sum b_{rk} c_{k2} \ldots\ldots \sum b_{rk} c_{kn} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix}
a_{11}\sum b_{1k}c_{k1}+a_{12}\sum b_{2k}c_{k1}+....+a_{1r}\sum b_{rk}c_{k1}\ ....\ a_{11}\sum b_{1k}c_{kn}+a_{12}\sum b_{2k}c_{kn}+...+a_{1r}\sum b_{rk}c_{kn}\\
\vdots\\
a_{m1}\sum b_{1k}c_{k1}+a_{m2}\sum b_{2k}c_{k1}+....+a_{mr}\sum b_{rk}c_{k1}\ ....\ a_{m1}\sum b_{1k}c_{kn}+a_{m2}\sum b_{2k}c_{kn}+...+a_{mr}\sum b_{rk}c_{kn}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\sum a_{11}b_{1k}c_{k1}+\sum a_{12}b_{2k}c_{k1}+....+\sum a_{1r}b_{rk}c_{k1}\ ....\ \sum a_{11}b_{1k}c_{kn}+\sum a_{12}b_{2k}c_{kn}+...+\sum a_{1r}b_{rk}c_{kn}\\
\vdots\\
\sum a_{m1}b_{1k}c_{k1}+\sum a_{m2}b_{2k}c_{k1}+....+\sum a_{mr}b_{rk}c_{k1}\ ....\ \sum a_{m1}b_{1k}c_{kn}+\sum a_{m2}b_{2k}c_{kn}+...+\sum a_{mr}b_{rk}c_{kn}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{k2} & ..... & \sum_r a_{1r}\sum_k b_{rk}c_{kn}\\
 & & \vdots & \\
\sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{k1} & \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{k2} & ..... & \sum_r a_{mr}\sum_k b_{rk}c_{kn}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\sum_r\sum_k a_{1r}b_{rk}c_{k1} & \sum_r\sum_k a_{1r}b_{rk}c_{k2} & ..... & \sum_r\sum_k a_{1r}b_{rk}c_{kn}\\
 & & \vdots & \\
\sum_r\sum_k a_{mr}b_{rk}c_{k1} & \sum_r\sum_k a_{mr}b_{rk}c_{k2} & ..... & \sum_r\sum_k a_{mr}b_{rk}c_{kn}
\end{bmatrix}
$$

Selanjutnya akan dicari bentuk dari (AB) C sebagai berikut :

$$
AB=\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12}....a_{1r}\\
\vdots & \\
a_{m1} & a_{m2}...a_{mr}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12}....b_{1k}\\
\vdots & \\
b_{r1} & b_{r2}...b_{rk}
\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}
\sum_r a_{1r}b_{r1} & \sum_r a_{1r}b_{r2} & .... & \sum_r a_{1r}b_{rk}\\
 & & \vdots & \\
\sum_r a_{mr}b_{r1} & \sum_r a_{mr}b_{r2} & .... & \sum_r a_{mr}b_{rk}
\end{bmatrix}
$$

$$
(AB)C=\begin{bmatrix}
\sum_r a_{1r}b_{r1} & \sum_r a_{1r}b_{r2} & .... & \sum_r a_{1r}b_{rk}\\
 & & \vdots & \\
\sum_r a_{mr}b_{r1} & \sum_r a_{mr}b_{r2} & .... & \sum_r a_{mr}b_{rk}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12}....c_{1n}\\
 & \vdots\\
c_{k1} & c_{k2}...c_{kn}
\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\sum_r a_{1r}b_{r1}c_{11}+\sum_r a_{1r}b_{r2}c_{21}+....+\sum_r a_{1r}b_{rk}c_{k1}\ ....\ \sum_r a_{1r}b_{r1}c_{1n}+\sum_r a_{1r}b_{r2}c_{2n}+...+\sum_r a_{1r}b_{rk}c_{kn}\\
\vdots\\
\sum_r a_{mr}b_{r1}c_{11}+\sum_r a_{mr}b_{r2}c_{21}+\ ....\ +\sum_r a_{mr}b_{rk}c_{k1}\ .....\ \sum_r a_{mr}b_{r1}c_{1n}+\sum_r a_{mr}b_{r2}c_{2n}+...+\sum_r a_{mr}b_{rk}c_{2k}
\end{bmatrix}
$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{k1} & \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{k2} & .... & \sum_r \sum_k a_{1r} b_{rk} c_{kn} \\ & & \vdots & \\ \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{k1} & \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{k2} & .... & \sum_r \sum_k a_{mr} b_{rk} c_{kn} \end{bmatrix}$$

Jadi terbukti bahwa $(AB)C = A(BC)$.

Selanjutnya dengan menerapkan sifat-sifat pada operasi pada matriks, maka diperoleh suatu ketentuan yang ditulis dalam teorema berikut :

Teorema 2.1: *Setiap sistem persamaan linear pasti memenuhi salah satu kondisi berikut:*

tidak memiliki solusi, memiliki solusi tunggal, atau memiliki banyak solusi.

Bukti :

Misal sistem persamaan linear $AX=B$ memiliki solusi dan solusi tersebut adalah X_1 dan X_2. Diperoleh $AX_1 = B$ dan $AX_2 = B$, sehingga $AX_1 = AX_2$. Akibatnya $A(X_1\text{-}X_2) = 0$.

Jika $X_0 = X_1 - X_2$, maka

$$\begin{aligned} A(X_1 + kX_0) &= AX_1 + A(kX_0) \\ &= AX_1 + k\,A(X_0) \\ &= B + 0 \\ &= B \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil di atas, terlihat bahwa $X_1 + kX_0$ juga merupakan solusi. Karena terdapat tak hingga banyak untuk scalar k, maka sistem persamaan linear tersebut memiliki takhingga banyak solusi.

MATRIKS YANG MEMILIKI INVERS (INVERTIBEL)

Suatu matriks persegi dikatakan memiliki invers (dapat dibalik / invertible) jika terdapat matriks B sehingga $AB = BA = I$, dengan I matriks satuan.

Contoh :

Matriks $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ merupakan invers dari matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ sebab

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIKS ELEMENTER

Suatu matriks persegi berukuran $n \times n$ dinamakan matriks elementer jika matriks tersebut dapat diperoleh dari suatu matriks identitas berukuran $n \times n$ ($\boldsymbol{I_n}$) dengan melakukan satu kali OBE.

Contoh :

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (mengalikan baris kedua dari I_2 dengan 2)

b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (menukar baris kedua dari I_2 dengan baris pertama)

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (menambahkan dua kali baris kedua dari I_2 dengan baris pertama)

Misal kita memiliki matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Selanjutnya kita kalikan matriks elementer $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ dengan matriks A, diperoleh $EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Terlihat bahwa matriks yang baru dapat diperoleh dari matriks A dengan melakukan OBE yang sama untuk memperoleh matriks E. Hal ini dinyatakan dalam terome di bawah ini.

Teorema 2.2: Jika suatu matriks elementer E diperoleh dengan melakukan suatu OBE pada I_m dan A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka hasil kali EA merupakan suatu matriks yang diperoleh dari A dengan melakukan OBE yang sama pada I_m untuk memperoleh E.

Penting :

Jika suatu OBE dikenakan pada suatu matriks identitas ***I*** sehingga menghasilkan matriks ***E***, maka pasti terdapat suatu OBE yang apabila dikenakan pada ***E*** akan menghasilkan ***I***.

Contoh :

a). $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 2R_1 \to R_1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tfrac{1}{2} R_1 \to R_1 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b). $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_1 \\ R_1 \to R_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_1 \\ R_1 \to R_2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c). $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} 7R_1 + R_2 \to R_2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} -7R_1 + R_2 \to R_2 \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

operasi –operasi di atas dapat dituliskan dalam tabel sebagai berikut :

OBE pada ***I*** untuk memperoleh ***E***	OBE pada ***E*** untuk memperoleh ***I***
Mengalikan baris ke-i dengan ***k***	Mengalikan baris ke-i dengan ***1/k***
Menukar baris ke-i dengan baris ke-j	Menukar baris ke-i dengan baris ke-j
Menambahkan ***k*** kali baris ke-i pada baris ke-j	Menambahkan **-*k*** kali baris ke-i pada baris ke-j

Teorema berikut menunjukkan sifat penting dari matriks elementer.

Teorema 2.3: *Setiap matriks elementer mempunyai invers dan inversnya juga merupakan matriks elementer.*

Bukti : Karena setiap matriks elementer $\boldsymbol{E}$ diperoleh dengan melakukan sebuah OBE pada $\boldsymbol{I}$ dan karena dapat ditentukan suatu OBE lagi pada $\boldsymbol{E}$ sehingga diperoleh $\boldsymbol{I}$, maka menurut teorema 2.2 terdapat matriks elementer $\boldsymbol{E}_0$ sehingga :

$$\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{I} \quad \text{dan } \boldsymbol{E} \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{I}$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\boldsymbol{E}$ mempunyai invers suatu matriks elementer $\boldsymbol{E}_0$.

Selanjutnya sifat sifat matriks elementer di atas akan digunakan untuk menentukan invers dari suatu matriks. Misal akan dicari inverse dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Langkah yang ingin dilakukan adalah mengalikan matriks $\boldsymbol{A}$ dengan matriks elementer-matriks elementer sehingga diperoleh suatu matriks identitas sebagai berikut :

1.) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \qquad \Rightarrow E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

2.) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} R_2 - \frac{1}{2} R_1 \rightarrow R_2 \qquad \Rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

3.) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{2} R_1 \rightarrow R_1 \qquad \Rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4.) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} R_1 - R_2 \rightarrow R_1 \qquad \Rightarrow E_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} 2R_2 \rightarrow R_2 \qquad \Rightarrow E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

6.) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Diperoleh : $E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 \; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(Kalikan sesuai kesamaan warna)

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ adalah $E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Langkah –langkah seperti di atas dapat digunakan untuk mencari invers dari suatu matriks secara simultan sebagai berikut :

Misal akan dicari invers dari matriks $B = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Terapkan OBE pada B disisi sebelah kiri dan secara bersamaan disebelah kanan OBE yang sama pada I, yaitu :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 - \tfrac{1}{3} R_1 \to R_2 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] 3R_2 \to R_2 \quad \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] R_1 - 2R_2 \to R_1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \tfrac{1}{6}R_1 \to R_1 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \tfrac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right] \quad \Rightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

LATIHAN:

Cari invers dari matriks –matriks berikut :

1. $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

HUBUNGAN INVERS DAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN LINEAR

Jika $A_{n \times n}$ merupakan matriks yang mempunyai invers dan B matriks berukuran $n \times 1$, maka solusi dari sistem persamaan linear $AX = B$ adalah $X = A^{-1} B$. Hal ini dituangkan dalam teorema sebagai berikut :

Teorema : Jika A matriks berukuran $n \times n$, maka pernyataan berikut ekuivalen :

1. A mempunyai invers
2. $AX = 0$ hanya mempunyai solusi trivial
3. A ekuivalen baris dengan I_n.

Latihan :

1. Jika A = $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ dan X = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ tentukan solusi dari AX = X dan AX = 4X.
2. Tentukan nilai a dan b sehingga kedua matriks A dan B berikut tidak memiliki invers.

   $$A = \begin{bmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2a-3b-7 \end{bmatrix}$$

3. Diketahui matriks augmentasi dari suatu sistem persamaan linear sbb :

   $\begin{bmatrix} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{bmatrix}$. Tentukan nilai a dan b sehingga sistem persamaan linear tsb hanya memiliki satu solusi dan tidak punya solusi.

4. Tentukan matriks K sehingga $AKB = C$

   Dengan A= $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$; B = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; C = $\begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 6 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

MENGHITUNG DETERMINAN DENGAN EKSPANSI KOFAKTOR

MINOR

Jika A adalah matriks persegi, maka minor entri a_{ij} dinyatakan sebagai M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks setelah menghapus baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

KOFAKTOR

Jika M_{ij} merupakan minor dari A, maka $C_{ij} = (-1)^{i+j}$ dinamakan kofaktor entri a_{ij}.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3; C_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

DETERMINAN

Jika A merupakan matriks berukuran n × n, maka determinan dari matriks A dapat dihitung dengan cara :

1. Det(A) = $a_{1j}\ C_{1j} + a_{2j}\ C_{2j} + \dots + a_{nj}\ C_{nj}$.
2. Det (A) = $a_{i1}\ C_{i1} + a_{i2}\ C_{i2} + \dots + a_{in}\ C_{in}$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11}\ C_{11} + a_{12}\ C_{12} + a_{13}\ C_{13}.$$

Dengan perhitungan diperoleh :

Det (A) = 1 (-3) + 2 (-2) + 3 (4) = 5

Latihan :

Dengan ekspansi kofaktor, tentukan determinan dari matriks berikut :

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 14 & 2 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 9 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & k & k \\ k^2 & k^2 & k^2 \end{bmatrix}$

4. $D = \begin{bmatrix} k-1 & 2 & 3 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 3 & 4 & k-4 \end{bmatrix}$.

MENENTUKAN INVERS DENGAN KOFAKTOR

Misal $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Melalui perhitungan diperoleh :

C_{11} = -3, C_{12} = -2, C_{13} = 4

C_{21} = 4, C_{22} = 1, C_{23} = -2

C_{31} = 1, C_{32} = 4, C_{33} = -3.

Jika suatu baris kita kalikan dengan kofaktor pada baris yang berbeda, maka diperoleh hasil sebagai berikut :

- $a_{11} C_{21} + a_{12} C_{22} + a_{13} C_{23} = 1(4) + 2(1) + 3(-2) = 0$

- $a_{11}\, C_{31} + a_{12}\, C_{32} + a_{13}\, C_{33} = 1(1) + 2(4) + 3(-3) = 0$
- $a_{21}\, C_{11} + a_{22}\, C_{12} + a_{23}\, C_{13} = 2(-3) + 1(-2) + 2(4) = 0$
- $a_{21}\, C_{31} + a_{22}\, C_{32} + a_{23}\, C_{33} = 2(1) + 1(4) + 2(-3) = 0$
- $a_{31}\, C_{11} + a_{32}\, C_{12} + a_{33}\, C_{13} = 0(-3) + 2(-2) + 1(4) = 0$
- $a_{31}\, C_{21} + a_{32}\, C_{22} + a_{33}\, C_{23} = 0(4) + 2(1) + 1(-2) = 0$

Penting :
Berdasarkan ilustrasi tersebut, dapat dibuktikan bahwa:

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}\, C_{j2} + \ldots + a_{in}\, C_{jn} = 0 \text{ untuk setiap } i \neq j.$$

MENENTUKAN INVERS

Sebelum membahas invers, didefinisikan adjoin dari suatu matriks sebagai berikut :

Jika $\boldsymbol{A}$ sebarang matriks berukuran $n \times n$ dan C_{ij} adalah kofaktor dari $\boldsymbol{A}$, maka

matriks $\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix}$ dinamakan **matriks kofaktor** dan transposenya, yaitu

$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \ldots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix}$ dinamakan **adjoin** $\boldsymbol{A}$.

Jika kita kalikan matriks $\boldsymbol{A}$ dengan adjoin $\boldsymbol{A}$, diperoleh :

$$A \times \text{adjoin } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \ldots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \ldots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}$$

Entri pada baris ke-i kolom ke-j dari matriks B adalah :

$$b_{ij} = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}\, C_{j2} + \ldots + a_{in}\, C_{jn}\, ,$$

sehingga $b_{ij} = 0$ untuk setiap $i \neq j$ dan $b_{ii} = \det A$.

Diperoleh, $A \times \text{adjoin } A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = \det A \times I.$

Jadi, $A \times \text{adjoin } A = \det \text{A} \times \text{I} \Leftrightarrow A\left(\dfrac{\text{adjoin } A}{\det A}\right) = I$.

Akibatnya jika A mempunyai invers, maka $A^{-1} = \dfrac{\text{adjoin } A}{\det A}$.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adjoin } A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \text{adjoin } A = \frac{1}{5} \times \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} \end{bmatrix}.$$

Latihan :

Tentukan invers dari matriks berikut dengan mencari adjoin :

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

ATURAN CRAMER

Sistem persamaan linear $AX = B$ dengan det $A \neq 0$ mempunyai solusi tunggal, yaitu :

$x_i = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$ dengan A_j adalah matriks yang diperoleh dari matriks A dengan mengganti kolom ke-j dengan matriks B.

Bukti :

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} B = \frac{1}{\det A}(\text{adjoin } A)\, B = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1C_{11} + b_2C_{21} + \dots + b_nC_{n1} \\ b_1C_{12} + b_2C_{22} + \dots + b_nC_{n2} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ b_1C_{1n} + b_2C_{2n} + \dots + b_nC_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_j = \frac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \dots + b_nC_{nj}}{\det(A)}$$

Selanjutnya dibentuk $A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, yaitu matriks yang diperoleh dari matriks A dengan mengganti kolom ke-j dengan B.

Jadi peroleh $x_j = \dfrac{b_1C_{1j} + b_2C_{2j} + \dots + b_nC_{nj}}{\det(A)} = \dfrac{\det(A_j)}{\det(A)}$.

Contoh :

Tentukan solusi sistem persamaan linear :

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 8 \\ 2x + y + 2z &= 6 \\ 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

Penyelesaian :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 5$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_1) = 8(-3) - 2(-4) + 3(7) = 5$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 1(-4) - 8(2) + 3(10) = 10$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = 1(-7) - 2(10) + 8(4) = 5$$

Jadi sistem persamaan linear tersebut mempunyai solusi :

$x = \frac{5}{5} = 1$; $y = \frac{10}{5} = 2$; $z = \frac{5}{5} = 1$.

Latihan :

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linear berikut :

1. $$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 2 \\ x - 2y - 4z &= -4 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 4x + 5y &= 2 \\ 11x + y + 2z &= 3 \\ x + 5y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 4x + y + z + w &= 6 \\ 3x + 7y - z + w &= 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w &= -3 \\ x + y + z + 2w &= 3 \end{aligned}$$